উচ্চ মাধ্যমিক
ত্রিকোণমিতি

নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর জন্য

শ্রীভূপেন্দ্রচন্দ্র দাস
শ্রীভোলানাথ মুখোপাধ্যায়

উচ্চ-মাধ্যমিক ত্রিকোণমিতি

(নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর জন্য)

প্রেসিডেন্সী কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক
শ্রীভূপেন্দ্রচন্দ্র দাস, এম. এস্‌-সি.
ও
স্কটিশচার্চ কলেজের গণিতাধ্যাপক
শ্রীভোলানাথ মুখোপাধ্যায়, এম. এ.
প্রেমচাঁদ রায়চাঁদ স্কলার
প্রণীত

ইউ. এন্. ধর অ্যাণ্ড সন্স প্রাইভেট লিমিটেড
১৫, বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট, কলিকাতা ১২

প্রকাশক :
শ্রীদ্বিজেন্দ্রনাথ ধর, বি.এল.
ইউ. এন্. ধর অ্যাণ্ড সন্স প্রাঃ লিঃ
১৫, বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট,
কলিকাতা ১২

মুদ্রক :
শ্রীত্রিদিবেশ বসু
কে. পি. বসু প্রিণ্টিং ওয়ার্কস
১১, মহেন্দ্র গোস্বামী লেন,
কলিকাতা ৬

ভূমিকা

ইংরাজী ভাষাতে লেখা আমাদের Intermediate Trigonometry কতকগুলি বৈশিষ্ট্যের জন্য বহু অধ্যাপকের সমাদর ও সহানুভূতি লাভ করিয়াছে। আমরা তাঁহাদের আন্তরিক ধন্যবাদ জানাইতেছি। দুই-তিন বৎসর যাবৎ কতিপয় শিক্ষকমহাশয় আমাদের পূর্বোক্ত পুস্তক উচ্চ-মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের উচ্চ শ্রেণীতে ব্যবহার করিতেছেন। তাহাতে ছাত্রছাত্রীদের কিছুটা অসুবিধা হইতেছিল। সেজন্য আমরা আমাদের ইংরাজীতে লেখা Intermediate Trigonometry উচ্চ-মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর ছাত্রছাত্রীদের সুবিধার জন্য বাংলায় অনুবাদ করিয়া এবং পাঠ্যতালিকা-অনুযায়ী সাজাইয়া বাহির করিলাম। আশা করি, ইংরাজী ভাষায় লেখা বইখানির মত এই বইখানিও শিক্ষকমহাশয় ও ছাত্রছাত্রীদের নিকট সমাদর লাভ করিবে।

এই অনুবাদকার্যে আমাদের ছাত্রী অধ্যাপিকা জ্যোতি চৌধুরী এম. এস-সি. আমাদের বিশিষ্ট ভাবে সাহায্য করিয়া আমাদের কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করিয়াছে। বইখানির প্রকাশের কার্যে আমাদের আর একজন ছাত্রী শ্রীমতী কল্পনা সরকার বি. এস-সি. এবং একজন ছাত্র শ্রীমান দ্বিজেন্দ্রনাথ ধর বি. এল. আমাদের বহুপ্রকারে সাহায্য করিয়াছে। সেজন্য তাহাদের অশেষ ধন্যবাদ দিতেছি।

নানাপ্রকার কর্মে ব্যস্ত থাকা সত্ত্বেও কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস্-এর কর্তৃপক্ষ ও কর্মিগণ আমাদের বইখানি অতি অল্পসময়ের মধ্যে মুদ্রিত করিয়া দিবার জন্য আমরা তাঁহাদের কাছেও কৃতজ্ঞ।

কলিকাতা
১৫ই ডিসেম্বর, ১৯৬২

ভুপেন্দ্রচন্দ্র দাস
ভোলানাথ মুখোপাধ্যায়

Syllabus for the Higher Secondary Course

TRIGONOMETRY

Class IX

[*Chapters I—IV, pages 1—49*]

Measurement of angles in degrees, minutes, seconds and in radians. Definition of trigonometrical ratios of an acute angle. Trigonometrical ratios of the standard angles—0°, 30°, 45°, 60°, 90°, (undefined values such as $\tan 90^\circ$, $\cot 0^\circ$ to be excluded). Simple identities connecting the ratios of an angle immediately derivable from a right-angled triangle. Trigonometrical ratios of complementary angles.

Easy problems on heights and distances reducible to the solution of right-angled triangles involving the standard angles above.

Class X

[*Chapters V—X, pages 50—115*]

Trigonometrical ratios of any angle ; Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle ; Addition and subtraction formulæ ; Transformation of products and sums ; Multiple and sub-multiple angles.

Class XI

[*Chapter XI—end*]

Graphs of simple trigonometric functions.

Trigonometric equations and general values ; Inverse Circular Functions.

Relations between sides and angles of a triangle ; In-radius, circum-radius and area of a triangle ; Practical solution of a triangle with the help of logarithms ; Simple problems of heights and distances.

সূচীপত্র

Greek letters used in the book

α (Alpha)	β (Bēta)	γ (Gamma)
δ (Delta)	θ (Theta)	π (Pai)
ϕ (Phai)	ψ (Psi)	Δ (Delta)

IMPORTANT FORMULÆ AND RESULTS

I. A radian $= 57° \ 17' \ 44{\cdot}8''$ nearly.

1 degree $= {\cdot}01745$ radians nearly.

2 right angles $= 180° = \pi$ radians.

$\pi = \frac{22}{7} = 3{\cdot}1416$ approximately.

Radian measure of an angle at the centre of a circle

$$= \frac{\text{subtending arc}}{\text{radius}}.$$

II. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$; $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta. \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta.$$

III. $\sin 0° = 0$; $\cos 0° = 1$; $\tan 0° = 0$.

$\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 45° = 1$.

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$.

$\sin 90° = 1$; $\cos 90° = 0$; $\tan 90° = \infty$.

$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$.

$\sin 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$.

$\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; $\cos 36° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$.

$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$.

$\sin 180° = 0$; $\cos 180° = -1$; $\tan 180° = 0$.

$\sin 270° = -1$; $\cos 270° = 0$; $\tan 270° = \infty$.

$\sin 360° = 0$; $\cos 360° = 1$; $\tan 360° = 0$.

IV. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$; $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$; $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$.

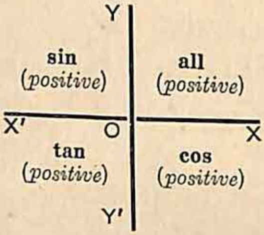
$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$; $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$.

$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$; $\tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$.

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$; $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$.

$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$; $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$.

$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$; $\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$.



V. $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}.$$

VI. $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$.

VII. $$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}.$$

VIII. $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A};\quad \cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\left.\begin{array}{l}1-\cos 2A=2\sin^2 A\\ 1+\cos 2A=2\cos^2 A\end{array}\right\}$$

$$\tan^2 A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}.$$

IX. $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$

$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$$

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.$$

X. $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}};\quad \cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan^2\frac{\theta}{2}.$$

XI. If $\sin\theta = \sin\alpha$, then $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$.

If $\cos\theta = \cos\alpha$, then $\theta = 2n\pi \pm \alpha$.

If $\tan\theta = \tan\alpha$, then $\theta = n\pi + \alpha$.

If $\sin\theta = 0$, or, $\tan\theta = 0$, $\theta = n\pi$.

If $\cos\theta = 0$, or, $\cot\theta = 0$, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$.

If $\sin\theta = 1$, $\theta = (4m+1)\dfrac{\pi}{2}$; if $\sin\theta = -1$, $\theta = (4m-1)\dfrac{\pi}{2}$.

If $\cos\theta = 1$, $\theta = 2m\pi$; if $\cos\theta = -1$, $\theta = (2m+1)\pi$.

XII. $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{1}{2}\pi$

$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{1}{2}\pi$

$\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{1}{2}\pi$

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

$$\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$$

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$$

$$\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\}$$

$$\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy \mp \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}\}.$$

XIII. $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

$\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$; $\log_a m^n = n\log_a m$;

$\log_a m = \log_b m \times \log_a b$; $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$.

XIV. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; \\ \cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}; \\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{aligned}\right\}$$

$$a = b \cos C + c \cos B.$$
$$b = c \cos A + a \cos C.$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{bc}$$

$$\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{ca}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{ab}.$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}bc \sin A = \tfrac{1}{2}ca \sin B = \tfrac{1}{2}ab \sin C$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ where } 2s = a+b+c$$
$$= \frac{abc}{4R}.$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{abc}{4\Delta}.$$

$$r = \frac{\Delta}{s} = 4R \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C$$
$$= (s-a) \tan \tfrac{1}{2}A = (s-b) \tan \tfrac{1}{2}B = (s-c) \tan \tfrac{1}{2}C.$$

$$r_1 = \frac{\Delta}{s-a} = 4R \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C$$
$$= s \tan \tfrac{1}{2}A.$$

$$r_2 = \frac{\Delta}{s-b} = 4R \cos \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C$$
$$= s \tan \tfrac{1}{2}B.$$

$$r_3 = \frac{\Delta}{s-c} = 4R \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C$$
$$= s \tan \tfrac{1}{2}C.$$

IMPORTANT RESULTS

1. If $A+B+C=\pi$, then

(i) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$.

(ii) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$.

(iii) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

(iv) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

(v) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$.

(vi) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

(vii) $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$.

(viii) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

$$=1+4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}.$$

(ix) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$$

(x) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$.

(xi) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

2. $\underset{\theta\to 0}{Lt}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$; $\underset{\theta\to 0}{Lt}\cos\theta=1$; $\underset{\theta\to 0}{Lt}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$.

3. Area of a circle of radius $r=\pi r^2$.

Perimeter of a circle of radius $r=2\pi r$.

উচ্চ-মাধ্যমিক ত্রিকোণমিতি

প্রথম অধ্যায়

কোণ-পরিমাপন

1·1. 'ত্রিকোণমিতি'—এই নাম হইতে স্পষ্টই বুঝিতে পারা যায় যে, ত্রিভুজ-সম্পর্কীয় পরিমাপনের পদ্ধতি ইহার বিষয়বস্তু ছিল। বর্তমানে ইহার ক্ষেত্র বিস্তৃত হইয়াছে, কেবল ত্রিভুজের কোণই নহে, অন্য যে-কোন কোণ-সম্পর্কীয় পরিমাপন-পদ্ধতি ইহার বিষয়বস্তুর অঙ্গীভূত হইয়াছে।

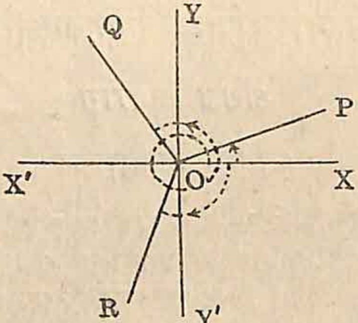
1·2. ত্রিকোণমিতিক কোণ (Trigonomerical Angles).

জ্যামিতিতে কোণের সংজ্ঞা ছিল নিম্নলিখিত রূপ :—দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে একটি কোণ উৎপন্ন করে ; এই কোণের মান 0° ডিগ্রি ও 360° ডিগ্রির মধ্যে থাকিবে এবং এই মান-অনুযায়ী ইহা সূক্ষ্ম (acute), স্থূল (obtuse) অথবা প্রবৃদ্ধ (reflex) কোণ হইবে। জ্যামিতিতে কোণকে সর্বদা ধনাত্মক হিসাবে গণ্য করা হইয়াছে এবং এখানে ঋণাত্মক কোণ সম্পূর্ণ অর্থহীন। কিন্তু, ত্রিকোণমিতিতে কোণের সংজ্ঞা আরও ব্যাপকভাবে কল্পনা করা হইয়াছে।

ত্রিকোণমিতিতে কোণের উৎপত্তি কল্পনা করা হইয়াছে একটি সরলরেখার আবর্তনের ফলে ; এই রেখা আবর্তনের প্রারম্ভে প্রদত্ত কোণের একটি বাহুর সহিত মিশিয়া থাকিবে ; এখন ইহার একটি প্রান্তবিন্দু স্থির রাখিয়া সেই অবস্থান হইতে আবর্তন করিতে হইবে,—আবর্তন করিতে করিতে অবশেষে যখন এই রেখার অবস্থান প্রদত্ত কোণের অপর বাহুর সহিত মিশিয়া যাইবে, তখনই বলা হয় আবর্তনকারী রেখাটি ঐ নির্দিষ্ট কোণটি উৎপন্ন করিল।

দৃষ্টান্তস্বরূপ বলা যায় যে, একটি সরলরেখা ইহার প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী আবর্তনের ফলে XOP সূক্ষ্মকোণটি উৎপন্ন করিয়াছে। সরলরেখাটি আবর্তন আরম্ভ করিয়া ঘুরিতে ঘুরিতে পুনরায় যখন ইহার প্রথম অবস্থানের সহিত মিশিয়া যাইবে তখনই একটি আবর্তন সম্পূর্ণ হইল। একটি সরলরেখা OX-অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া ও ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়া একটি আবর্তন সম্পূর্ণ করিবার পর পুনরায় ঘুরিয়া OQ-

অবস্থানে আসিলে উৎপন্ন কোণটি পাঁচ সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। এক্ষণে আবর্তন ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে, সেদিকে অথবা বিপরীত দিকে হইতে



পারে। **আবর্তনকারী রেখার ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী আবর্তনের ফলে উৎপন্ন কোণকে ধনাত্মক কোণ বলিয়া অভিহিত করা হইয়া থাকে। ঘড়ির কাঁটার দিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন কোণকে ঋণাত্মক কোণ বলিয়া অভিহিত করা হয়।** দৃষ্টান্তস্বরূপ, XOR কোণকে প্রথম অবস্থান OX হইতে ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে মাপিলে উহা ঋণাত্মক কোণ হইবে।

ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ কোনরূপ সীমাবদ্ধ নয়; ইহা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয় প্রকারের হইতে পারে।

OX আবর্তনকারী রেখার প্রথম অবস্থান; এক্ষণে XO কে X' পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল এবং YOY' উহার সহিত লম্ব টানা হইল। এইরূপে ক্ষেত্রটি চারিটি পাদে (Quadrant) বিভক্ত হইল; XOY প্রথম পাদ, YOX' দ্বিতীয় পাদ, X'OY' তৃতীয় পাদ এবং Y'OX চতুর্থ পাদ। $+920°$ ডিগ্রির কোণ উৎপন্ন করিতে হইলে আবর্তনকারী রেখাটিকে দুইটি আবর্তন সম্পূর্ণ করিতে হইবে; যাহার ফলে $2 \times 360° = 720°$ ডিগ্রির কোণ উৎপন্ন হইবে; অতঃপর আবর্তনকারী রেখাটিকে আরও $200°$ ডিগ্রির কোণ উৎপন্ন করিতে হইবে, এবং ইহার শেষ অবস্থান হইবে তৃতীয় পাদে। অনুরূপভাবে, $-1354°$ কোণ উৎপন্ন করিলে আবর্তনকারী রেখার শেষ অবস্থান হইবে প্রথম পাদে, কারণ $-1354° = -360° \times 3 - 274°$.

মনে রাখিতে হইবে যে, দুইটি কোণের অন্তর 360° ডিগ্রির গুণিতক এবং

আবর্তনকারী রেখার প্রথম অবস্থান এক হইলে, উভয় ক্ষেত্রেই উহার শেষ অবস্থানও একই স্থানে হইবে ; যেমন $255°$ এবং $-105°$ কোণ দুইটির ক্ষেত্রে আবর্তনকারী রেখার প্রথম অবস্থান এক হইলে শেষ অবস্থানও একই স্থানে হইবে।

1·3. কোণ-পরিমাপনের এককসমূহ (Units of measurement of angles).

এখন আমরা কোণ-পরিমাপনের বিভিন্ন পদ্ধতির এককসমূহের সংজ্ঞা নির্দেশ করিব। এককের সংজ্ঞা নির্দেশ করিতে হইলে এমন একটি প্রামাণ্য কোণকে (Standard angle) ভিত্তি করিতে হইবে যাহা যে-কোন পদ্ধতি-নিরপেক্ষ হইবে। সমকোণ এইরূপ একটি কোণ। কোন একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে সন্নিহিত কোণদ্বয় যদি সমান হয়, তাহা হইলে প্রতিটি কোণ সমকোণ হইবে—ইহাই জ্যামিতিতে সমকোণের সংজ্ঞা। এক সমকোণ সর্বত্রই সমান ; অতএব বিভিন্ন পদ্ধতিতে কোণ-পরিমাপের ভিত্তি হিসাবে ইহা বিশেষ সুবিধাজনক।

ত্রিকোণমিতিতে কোণ-পরিমাপের জন্য তিনটি পদ্ধতি অনুসৃত হয় ; যথা—

(i) **ষষ্টিক পদ্ধতি** (*Sexagesimal System*)

(ii) **শতক পদ্ধতি** (*Centesimal System*)

(iii) **বৃত্তীয় পদ্ধতি** (*Circular System*)

ষষ্টিক* পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতিতে একটি সমকোণকে 90 সমান অংশে বিভক্ত করা হয় এবং প্রত্যেক অংশকে বলা হয় **এক ডিগ্রি।** এক ডিগ্রিকে পুনরায় 60 ষষ্টিক **মিনিটে** ও প্রতি মিনিটকে 60 ষষ্টিক **সেকেণ্ডে** বিভক্ত করা হয়। অতএব,

1 সমকোণ $= 90°$ (ডিগ্রি)

$1° = 60'$ (ষষ্টিক মিনিট)

$1' = 60''$ (ষষ্টিক সেকেণ্ড)

* এইখানে প্রধানতঃ এক-ষষ্টিতম অংশে অন্তর্বিভক্ত করা হয় বলিয়া এই পদ্ধতির নাম ষষ্টিক পদ্ধতি। ইহাকে সাধারণ বা ইংরাজী পদ্ধতিও বলা হয়।

শতক* পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতিতে একটি সমকোণকে নিম্নলিখিতভাবে অন্তর্বিভক্ত করা হয় ঃ—

1 সমকোণ $= 100^g$ (গ্রেড)

$1^g \quad = 100'$ (শতক মিনিট)

$1' \quad = 100''$ (শতক সেকেণ্ড)

দ্রষ্টব্য। 1\` শতক মিনিট এবং 1′ ষষ্টিক মিনিট সমান নহে ; কারণ প্রথমটি এক সমকোণের $\frac{1}{100 \times 100}$ অংশ এবং দ্বিতীয়টি এক সমকোণের $\frac{1}{90 \times 60}$ অংশ ; অতএব 1′ ষষ্টিক মিনিটের $\frac{27}{50}$ অংশ 1\` শতক মিনিটের সমান। এইরূপে 1″ ষষ্টিক সেকেণ্ড অপেক্ষা 1\`\` শতক সেকেণ্ড ক্ষুদ্রতর এবং দ্বিতীয়টি প্রথমটির মাত্র $\frac{81}{250}$ অংশ।

1 সমকোণ $= 90° = 100^g$; অতএব $9° = 10^g$; এই সম্পর্ক মনে রাখিলেই উভয় পদ্ধতির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করা যায়। প্রথম পদ্ধতির যে-কোন কোণকে প্রথমে ডিগ্রিতে পরিণত করিয়া, অতঃপর $\frac{10}{9}$ দ্বারা গুণ করিলে গ্রেডে রূপান্তরিত হয়। এইরূপে, দ্বিতীয় পদ্ধতির যে-কোন কোণকে প্রথম পদ্ধতির কোণে রূপান্তরিত করা যায়। তৃতীয় অর্থাৎ বৃত্তীয় পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা আমরা পরে করিব।

1·4. উপপাদ্য ঃ প্রত্যেক বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক।

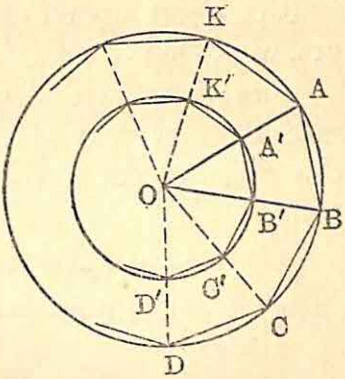
[*In all circles, the circumference bears a constant ratio to its diameter.*]

বিভিন্ন ব্যাসার্ধের এককেন্দ্রীয় দুইটি বৃত্ত লওয়া হইল। ABCD…ইহাদের যে-কোন একটির অন্তর্লিখিত n বাহু-বিশিষ্ট সুষম বহুভুজ। OA, OB, OC,… ব্যাসার্ধগুলি অপর বৃত্তটিকে যথাক্রমে A′, B′, C′,… ইত্যাদি

---

* এইখানে অন্তর্বিভাজন হয় শততম অংশে,—এইজন্য এই পদ্ধতির নাম শতক পদ্ধতি। ইহাকে ফরাসী পদ্ধতিও বলা হয়।

বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ইহা সহজেই দেখানো যায় যে, $A'B'C'\cdots$ অপর বৃত্তটির অন্তর্লিখিত n বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ। এক্ষণে $OA=OB$ এবং $OA'=OB'$; অতএব OAB এবং $OA'B'$ ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $OA : OA' = OB : OB'$ এবং O কোণ সাধারণ; অতএব ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। সুতরাং $AB : A'B' = OA : OA'$.



অতএব,

$$\frac{ABCD \cdots \text{ বহুভুজের পরিসীমা}}{A'B'C'D' \cdots \text{ বহুভুজের পরিসীমা}} = \frac{n.AB}{n.A'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}.$$

n-এর মান যাহাই হইক না কেন উপরোক্ত তথ্যটি সর্বক্ষেত্রে প্রযোজ্য। এখন $ABCD\cdots$ বহুভুজের বাহুসংখ্যা n যত বড় হইবে, ইহার প্রতিটি বাহু ততই ছোট হইতে থাকিবে। অতএব, n-কে সীমাহীন বৃহৎ কল্পনা করিলে অবশেষে বহুভুজের পরিসীমা অনুরূপ বৃত্তের পরিধির সহিত মিলিয়া যাইবে। অর্থাৎ আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হইলাম ঃ

$$\frac{ABCD\cdots \text{ বৃত্তের পরিধি}}{A'B'C'D'\cdots \text{ বৃত্তের পরিধি}} = \frac{OA}{OA'} = \frac{ABCD\cdots \text{ বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{A'B'C'D'\cdots \text{ বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$$

অতএব যে-কোন বৃত্তের পরিধি ও তাহার ব্যাসার্ধের অনুপাত ধ্রুবক হইবে। ব্যাস ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ বলিয়া আমরা সিদ্ধান্ত করি যে, যে-কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক।

এই ধ্রুবককে গ্রীক্ অক্ষর π দ্বারা সূচিত করা হয়। ইহার মান যে পদ্ধতিতে নির্ণয় করা হইয়াছে, তাহার আলোচনা এই গ্রন্থের ক্ষেত্র-বহির্ভূত। কোন কোন গণিতজ্ঞ 500 দশমিক স্থান পর্যন্ত ইহার মান নির্ণয় করিয়াছেন। ইহার আসন্ন মান $\frac{22}{7}$ এবং এই মানই সাধারণতঃ ব্যবহৃত হয়। ইহার অধিকতর আসন্ন মান $\frac{355}{113}$ এবং দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করিলে ইহার আসন্ন মান $3{\cdot}14159\cdots$। অতএব কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ r ও ব্যাস d হইলে,

বৃত্তের পরিধি $=\pi d = 2\pi r$, যেখানে $\pi = 3{\cdot}14159\cdots = \frac{22}{7}$ (স্থূল মান)

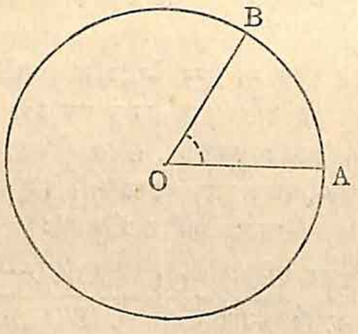
1·5. বৃত্তীয় একক বা রেডিয়ান মাপ (Circular Unit or Radian Measure).

যে-কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দীর্ঘ বৃত্তচাপ উহার কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে বলা হয় **এক রেডিয়ান** এবং লেখা হয় 1^c.

এক্ষণে আমরা প্রমাণ করিব যে, যে-কোন বৃত্তের সাহায্যে রেডিয়ানের সংজ্ঞা প্রকাশ করা হউক না কেন ইহা একটি ধ্রুবক কোণ; অতএব ইহা কোণ পরিমাপের পক্ষে একটি উপযুক্ত একক এবং ইহাই বৃত্তীয় এককরূপে পরিচিত।

উপপাদ্য 1. এক রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

[*A radian is a constant angle.*]



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB চাপ OA ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান লইলে, সংজ্ঞানুসারে, $\angle AOB = 1$ রেডিয়ান। যেহেতু কেন্দ্রস্থ যে-কোন কোণ ইহার উৎপন্নকারী চাপের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতী, এবং যেহেতু সমগ্র পরিধির দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ চারি সমকোণের সমান (জ্যামিতিতে প্রমাণিত), অতএব,

$$\frac{\angle AOB}{4\text{ সমকোণ}} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{সম্পূর্ণ পরিধি}} = \frac{\text{ব্যাসার্ধ}}{\text{পরিধি}}$$

অর্থাৎ, $\dfrac{1\text{ রেডিয়ান}}{4\text{ সমকোণ}} = \dfrac{r}{2\pi r} = \dfrac{1}{2\pi}$, (r বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

সুতরাং, 1 রেডিয়ান $= \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ।

কিন্তু π একটি ধ্রুবক। অতএব এক রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

দ্রষ্টব্য। এইরূপে আমরা দেখিতে পাই যে, যে-কোন বৃত্তের সাহায্যে রেডিয়ানের সংজ্ঞা প্রকাশ করা হউক না কেন, ইহার পরিমাপ সমান।

উপরের উপপাদ্য হইতে,

$$\pi \text{ রেডিয়ান} = 180° \text{ ডিগ্রি}$$

$$\therefore \quad 1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{\cdot}14159} = 57{\cdot}29577 \text{ ডিগ্রি}$$

$$= 57°\ 17'\ 44{\cdot}8'' \text{ (প্রায়)}$$

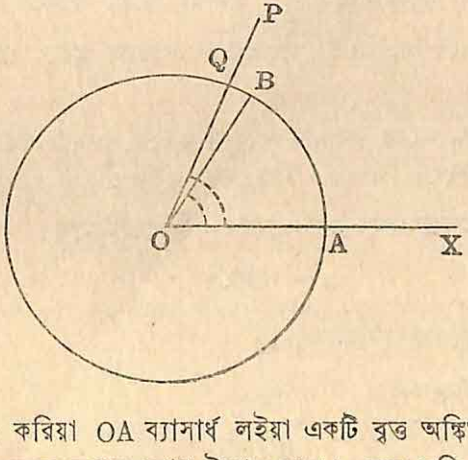
$$\therefore \quad 1 \text{ ডিগ্রি} = {\cdot}0174533 \text{ রেডিয়ান (প্রায়)}।$$

উচ্চতর গণিতে, সুবিধা হয় বলিয়া, কোণের মান প্রকাশ করা হয় বৃত্তীয় পদ্ধতিতে; বিশেষতঃ তত্ত্বমূলক আলোচনার ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি প্রায়ই ব্যবহৃত হয়। এই প্রসঙ্গে আমরা নিম্নলিখিত উপপাদ্যের উল্লেখ করিতে পারি:

উপপাদ্য 2. যে-কোন কোণের বৃত্তীয় মান, বৃত্তের কেন্দ্রে ঐ কোণ উৎপন্নকারী বৃত্তচাপ ও সেই বৃত্তের ব্যাসার্ধের অনুপাতের দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

[The measure of any angle in radians is expressed by the ratio of the arc of any circle subtending that angle at its centre, to the radius.]

মনে করি, XOP যে-কোন একটি কোণ।



O-কে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল; উহার চাপ AQ কেন্দ্রে XOP কোণ উৎপন্ন করে। মনে করি, AB ব্যাসার্ধের

সমান দীর্ঘ একটি চাপ। অতএব সংজ্ঞানুসারে, $\angle$AOB কোণ 1 রেডিয়ানের সমান।

এক্ষণে জ্যামিতি হইতে আমরা জানি যে, একটি বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণগুলি উহাদের উৎপন্নকারী চাপের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতী হইবে।

অতএব, $\dfrac{\angle XOP}{\angle AOB} = \dfrac{\text{চাপ } AQ}{\text{চাপ } AB} = \dfrac{\text{চাপ } AQ}{\text{ব্যাসার্ধ } OA}$

অথবা, $\dfrac{\angle XOP}{1 \text{ রেডিয়ান}} = \dfrac{\text{চাপ } AQ}{\text{ব্যাসার্ধ } OA}$

অর্থাৎ, $\angle XOP = \dfrac{\text{চাপ } AQ}{\text{ব্যাসার্ধ } OA}$ রেডিয়ান।

অতএব, $\angle$XOP-র রেডিয়ান মাপ θ, AQ চাপের দৈর্ঘ্য s এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হইলে,

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{অথবা,} \qquad s = r\theta.$$

দ্রষ্টব্য। উচ্চতর গণিতে **কোণের মান রেডিয়ানে থাকিলে, তাহা উল্লেখ করা হয় না; সাধারণতঃ তাহা উহ্যই থাকে।** কাজেই কোণ-পরিমাপের এককের উল্লেখ না থাকিলে, আমরা তাহা রেডিয়ান বলিয়া ধরিয়া লইব। যেমন, "একটি কোণ $\frac{\pi}{2}$" বলিয়া উল্লেখ করিলে উহা $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান বুঝাইবে; ইহাকে ডিগ্রিতে পরিবর্তিত করিলে হইবে 90°, অর্থাৎ এক সমকোণ।

1·6. কোন অঙ্কের সমাধান করিতে হইলে, তিনটি পদ্ধতির মধ্যে সম্পর্ক মনে রাখিতে হইবে। সম্পর্কটি নিম্নে দেওয়া হইল :

$$\textbf{1 সমকোণ} = 90^\circ = 100^g = \frac{\pi}{2} \textbf{ রেডিয়ান।}$$

অতএব, $\pi^c = 180^\circ$.

1·7. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Express*

(i) 63° 22′ 40·8″ in centesimal measure

and (ii) $203^g\ 58'\ 73''$ in radians.

এখানে,

(i) $63^\circ\ 22'\ 40{\cdot}8'' = 63\frac{189}{500}$ ডিগ্রি $= \frac{31689}{500} \times \frac{1}{90}$ সমকোণ

$= \frac{31689}{500} \times \frac{1}{90} \times 100$ গ্রেড $= \frac{3521}{50}$ গ্রেড $= 70^g\ 42^`$.

(ii) $203^g\ 58^`\ 73^{``} = 203{\cdot}5873$ গ্রেড $= 2{\cdot}035873$ সমকোণ

$= 2{\cdot}035873 \times \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $= 1{\cdot}0179365\pi$ রেডিয়ান।

Ex. 2. *Two angles of a triangle are $72^\circ\ 53'\ 51''$ and $41^g\ 22^`\ 50^{``}$ respectively. Find the third angle in radians.*

$41^g\ 22^`\ 50^{``} = 41{\cdot}2250$ গ্রেড $= \frac{41{\cdot}225}{10} \times 9$ ডিগ্রি $[\because 9^\circ = 10^g]$

$= 37{\cdot}1025$ ডিগ্রি $= 37^\circ\ 6'\ 9''$.

অতএব, প্রদত্ত কোণ দুইটির সমষ্টি $= 72^\circ 53' 51'' + 37^\circ 6' 9'' = 110^\circ$.

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান ; অতএব, তৃতীয় কোণটি

$= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ = 70 \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $(\because \pi^c = 180^\circ)$

$= \frac{7\pi}{18}$ রেডিয়ান।

Ex. 3. *Divide $\frac{\pi}{4}$ radians into two parts such that the number of sexagesimal minutes in one may be to the number of centesimal seconds in the other part as 27 : 2500.*

আমরা জানি, $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{\pi}$ সমকোণ $= \frac{1}{2}$ সমকোণ।

মনে করি, দ্বিতীয় অংশের শতক সেকেণ্ডের সংখ্যা x ; অতএব,

প্রথম অংশের ষষ্টিক মিনিটের সংখ্যা $\frac{27}{2500}x$.

এক্ষণে, $x^{``} = \frac{x}{100 \times 100 \times 100}$ সমকোণ

এবং $\frac{27}{2500}x' = \frac{27x}{2500 \times 60 \times 90}$ সমকোণ $= \frac{x}{500000}$ সমকোণ

$$\therefore \quad \frac{x}{1000000} + \frac{x}{500000} = \frac{1}{2}.$$

অর্থাৎ, $x = \frac{500000}{3}$

অতএব, দ্বিতীয় অংশ $= \frac{500000''}{3} = \frac{500000}{3 \times 100 \times 100 \times 100}$ সমকোণ

$= \frac{1}{6}$ সমকোণ $= 15°$

যেহেতু দুইটি অংশের সমষ্টি $\frac{1}{2}$ সমকোণ অর্থাৎ 45°, প্রথম অংশ হইবে 30°. অতএব অংশ দুইটি 30° এবং 15°.

Ex. 4. *The angles of quadrilateral are in A.P., and the number of grades in the least angle is to the number of radians in the greatest as 100 : π. Find the angles in degrees.*

মনে করি, চতুর্ভুজের কোণগুলির পরিমাপ যথাক্রমে α, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, $\alpha+3\beta$ ডিগ্রী।

$$\therefore \quad \alpha+\alpha+\beta+\alpha+2\beta+\alpha+3\beta = 360.$$

$$\therefore \quad 2\alpha+3\beta = 180. \qquad \cdots (1)$$

পুনরায়, ক্ষুদ্রতম কোণ $\alpha° = \frac{10}{9}\alpha^g$,

এবং বৃহত্তম কোণ, $(\alpha+3\beta)° = (\alpha+3\beta)\frac{\pi^c}{180}$

অতএব, প্রদত্ত সর্তানুসারে

$$\frac{10}{9}\alpha/(\alpha+3\beta)\frac{\pi}{180} = 100/\pi.$$

বা, $\frac{2\alpha}{\alpha+3\beta} = 1. \quad \therefore \quad \alpha = 3\beta.$

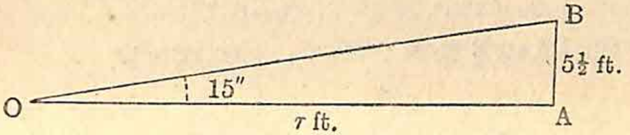
অতএব, (1) হইতে আমরা পাই

$3\alpha = 180$ বা $\alpha = 60°. \quad \therefore \quad \beta = \frac{\alpha}{3} = 20$

স্বতরাং, চতুর্ভুজের কোণগুলি যথাক্রমে

60°, 80°, 100° এবং 120°

Ex. 5. *At what distance does a man, $5\frac{1}{2}$ ft. in height, subtend an angle of 15″ ?*



মনে করি, AB মানুষটি O বিন্দুতে 15″-কোণ উৎপন্ন করে এবং মনে করি OA = r ft.

যেহেতু AOB কোণ অত্যন্ত ক্ষুদ্র, অতএব AO-এর তুলনায় AB যথেষ্ট ক্ষুদ্র। সুতরাং, AB-কে কার্যতঃ আমরা O-কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের একটি ক্ষুদ্র চাপ মনে করিতে পারি। অতএব, অনুচ্ছেদ 1·5-এর দ্বিতীয় উপপাদ্য-অনুসারে আমরা লিখিতে পারি

$$\frac{15}{60 \times 60} \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\frac{1}{2}}{r},$$

বা $$r = \frac{11}{2} \times \frac{180 \times 60 \times 60}{15 \times \pi} \text{ ft.}$$

$$= \frac{11}{2} \times \frac{180 \times 60 \times 60 \times 7}{15 \times 22} \times \frac{1}{3 \times 1760} \text{ miles}$$

$$= 14{\cdot}32 \text{ miles.}$$

Ex. 6. *The angles of a triangle are as 4 : 5 : 6. Express them in circular measure.*

মনে করি, কোণগুলির রেডিয়ান মাপ $4x$, $5x$, $6x$.

এখন, যেহেতু ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের অর্থাৎ π-এর সমান,

$\therefore\ 4x + 5x + 6x = \pi$ বা $x = \frac{1}{15}\pi$

$\therefore$ কোণগুলি যথাক্রমে $\frac{4}{15}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{5}\pi$.

Ex. 7. *The angles of a triangle are in A. P. and the greatest is double the least ; express the angles in degrees and in radians.*

মনে করি, কোণগুলি যথাক্রমে $\alpha - \beta$, α, $\alpha + \beta$.

এখন, যেহেতু ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°, অতএব

$$\alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta=180°$$

বা $3\alpha=180°$. $\therefore\ \alpha=60°$.

আবার, যেহেতু বৃহত্তম কোণ = 2 (ক্ষুদ্রতম কোণ)

$\therefore\ \alpha+\beta=2(\alpha-\beta)$,

বা $3\beta=\alpha$.

$\therefore\ \beta=\frac{1}{3}\alpha=\frac{1}{3}\times 60°=20°$.

অতএব, ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে 40°, 60°, 80° ডিগ্রী।

যেহেতু, $180°=\pi$, সুতরাং রেডিয়ান মাপে কোণগুলির মান হইবে যথাক্রমে $\frac{2}{9}\pi,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{9}\pi$.

Ex. 8. *The number of degrees in one of the acute angles of a right-angled triangle is three-tenths of the number of grades in the other; determine the angles in degrees.*

মনে করি, কোণ দুইটির মান $x°$, $90°-x°$ ($\because$ ত্রিভুজটি সমকোণী)

এখন, $x°=\frac{10}{9}x$ গ্রেড ; অতএব, প্রদত্ত সর্তানুসারে

$$90°-x=\frac{3}{10}\left(\frac{10}{9}x\right)$$

বা $\frac{4}{3}x=90°$. $\therefore\ x=67\frac{1}{2}°$. $\therefore\ 90°-x°=22\frac{1}{2}°$.

অতএব, কোণগুলির মান হইবে 90°, $67\frac{1}{2}°$, $22\frac{1}{2}°$.

Ex. 9. *Compare the areas of two circles in which the circumference of one is equal to an arc of 60° of the other.*

মনে করি, বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধ r_1, r_2, এবং তাহাদের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে S_1 এবং S_2.

মনে করি, দ্বিতীয় বৃত্তের AB বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে। এখন, যেহেতু $s=r\theta$, (θ-এর রেডিয়ান মাপ লইতে হইবে)

$$\therefore\ \text{AB বৃত্তচাপ}=r_2\cdot\frac{60°\pi}{180°}=\frac{r_2\pi}{3}.$$

কিন্তু প্রদত্ত সর্তানুসারে,

S_2 বৃত্তের AB বৃত্তচাপ = S_1 বৃত্তের পরিধি,

$$\therefore\ \frac{r_2\pi}{3}=2\pi r_1\ ; \qquad \therefore\ r_2=6r_1 \qquad \cdots\ (1)$$

এখন, $S_1 = \pi r_1{}^2$, $S_2 = \pi r_2{}^2$.

$$\therefore \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r_1{}^2}{\pi r_2{}^2} = \frac{r_1{}^2}{r_2{}^2} = \frac{r_1{}^2}{36 r_1{}^2} = \frac{1}{36}.$$

$$\therefore \quad S_1 : S_2 = 1 : 36.$$

Ex. 10. *What number will represent the angle 2°30′ when $\frac{1}{72}$ of a right angle is the unit ?*

$2°30' = 2\frac{1}{2}$ ডিগ্রি $= \frac{5}{2}$ ডিগ্রি = এক সমকোণের $\frac{5}{2 \times 90}$ অংশ

= এক সমকোণের $\frac{1}{36}$ অংশ

কিন্তু, পরিমাপনের একক এখানে = এক সমকোণের $\frac{1}{72}$ অংশ।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= \frac{1}{36} \div \frac{1}{72} = 2.$

Ex. 11. *The angles of a triangle have the same measure when the units are 1°, 2° and 3° respectively. Find the measure.*

মনে করি, কোণগুলি যথাক্রমে $x°$, $y°$, $z°$.

$$\therefore \quad x + y + z = 180.$$

এখন, প্রদত্ত সর্তানুসারে যেহেতু পরিমাপনের একক যথাক্রমে 1°, 2° ও 3° ধরিলে কোণগুলির মাপ সমান হইবে, অতএব

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{1+2+3} = \frac{180}{6} = 30.$$

∴ নির্ণেয় সাধারণ মাপ = 30.

Ex. 12. *If D be the whole number of degrees, m the whole number of minutes, and s the whole number of seconds in the same angle, then $3600D = 60m = s$.*

প্রদত্ত কোণে ডিগ্রির সংখ্যা = D

∴ " " মিনিটের " = 60D.

∴ " " সেকেণ্ডের " = 60 × 60D = 3600D.

আবার, " " মিনিটের " = m

∴ " " সেকেণ্ডের " = $60m$.

যেহেতু প্রদত্ত কোণে সেকেণ্ডের সংখ্যা = s,

$$\therefore \quad 3600D = 60m = s.$$

Examples I

1. Indicate the final position of a revolving line which has traced out the angle

(i) 1122°; (ii) $-810^\circ\,29'$;

(iii) $-617^g\,51`\,5``$; (iv) $\frac{18\pi}{5}$ radians.

2. Express (i) $55^\circ\,12'\,36''$ in centesimal measure;

(ii) $195^g\,35`\,24``$ in degrees, minutes, and secs.

3. How many radians are there in (i) $50^g\,75`\,50``$; (ii) $18^\circ\,33'\,45''$?

4. Express in each system of angular measurement the angle between the minute-hand and the hour-hand of a clock at quarter to twelve.

5. If x^g be taken as the unit angle, and the angles 600° and 16^c expressed in that unit be α and β respectively, find the relation between α and β.

6. The difference of two angles is 1°; the circular measure of their sum is 1; find the circular measure of the smaller angle.

7. Two angles are in the ratio $2:3$, and the difference of their measure in grades and in degrees respectively is $2\frac{1}{3}$; find the angles in degrees.

8. An angle is the excess of $D^\circ\,M'$ over $G^g\,m`$. Find the ratio of this angle to a right angle.

9. The circular measure of a certain angle is equal to the ratio of the number of degrees in it to the number of centesimal minutes; find the magnitude of the angle in degrees.

10. With two units of angular measurement differing by 10°, the measure of an angle are as $3:2$; determine the units.

11. If an angle standing upon an arc of length 'l' at the centre of a circle of radius 'r' be taken as unit, and three angles D°, G^g, and C circular units expressed in that unit be x, y, z respectively, show that

$$x:y:z=\frac{D\pi}{18}:\frac{G\pi}{20}:10C.$$

12. Three angles are in G.P. The number of grades in the

greatest angle is to the number of circular units in the least as 800 to π, and the sum of the three angles is 126°. Find the angles in grades.

13. Divide 54° in three parts, such that the circular measure of the first exceeds that of the second by $\frac{\pi}{10}$, and the sum of the second and third is 30 grades.

14. Find at what times between 7 and 8 o'clock the angle between the two hands of a clock is (i) 60^g, (ii) 155°.

15. The angles of a triangle are in A. P., and the number of radians in the greatest is to the number of grades in the least as $\pi : 40$. Find the angles in degrees.

16. In each of two triangles the angles are in G.P. ; the least angle of one of them is three times the least angle in the other, and the sum of the greatest angles is 240°. Find the circular measure of the angles.

17. One angle of a quadrilateral is $\frac{2}{3}$ of another and the two other angles are $66\frac{2}{3}$ grades and $\frac{3\pi}{4}$ radians. Express the angles in degrees.

18. The angles of a polygon (which has no reflex angle) are in A. P. The least angle is $\frac{2\pi}{3}$ radians and the common difference is 5°. Find the number of sides.

19. The number of sides of two regular polygons are as $m : n$, and the number of degrees in an angle of the first is to the number of grades in an angle of the second as $p : q$. Determine the number of sides in each polygon.

20. An arc of 50^g in one circle equals one of 60° in another ; find the radian-measure of an angle subtended at the centre of the first circle by an arc equal to the radius of the second.

21. Two regular figures are such that the number of degrees in an angle of one is to the number of degrees in an angle of the other as the number of sides in the first is to the number of sides in the second. The sum of the number of sides of the two figures being 9, determine the number of sides of each.

22. The wheel of a railway carriage is 4 ft. in diameter and makes 6 revolutions in a second ; how fast is the train going ?

23. The earth revolves round the sum in a circular orbit of radius 92700000 miles once a year. Find its velocity in miles per hour. If the apparent angular diameter of the sun observed from the earth be $32'$, find also the linear radius of the sun.

24. A tower subtends an angle of $10'$ when the observer is at a distance of 6 miles ; find its height.

25. Find the radius of the earth, if an angle of $1°$ is subtended at its centre by an arc joining two places on it distant 69·1 miles.

26. A horse is tied to a post by a rope 27 feet long. If the horse moves along the circumference of a circle always keeping the rope tight, find how far the horse will have gone when the rope has traced out an angle of $70°$. $(\pi = \frac{22}{7})$

27. A man running along a circular track at the rate of 10 miles per hour, traverses in 36 seconds, an arc which subtends $56°$ at the centre. Find the diameter of the circle. $(\pi = \frac{22}{7})$

28. An arc of $30°$ in one circle is double an arc in a second circle the radius of which is three times the radius of the first. Show that the arc of the second circle subtends $5°$ at its centre.

ANSWERS

1. (i) first quadrant. (ii) third quadrant. (iii) second quadrant. (iv) fourth quadrant.
2. (i) $61^g\ 34'\ 44''{\cdot}4$. (ii) $175°\ 49'\ 1''{\cdot}776$.
3. (i) $\cdot253775\pi$. (ii) $\frac{33}{320}\pi$.
4. $82°\ 30'$; $91^g\ 66'\ 6''{\cdot}6$; $\frac{11}{24}\pi$. 5. $a : \beta = 5\pi : 24$.
6. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{180}\right)$. 7. $6°$ and $9°$. 8. $\frac{1}{90}\left(D+\frac{M}{60}\right)-\frac{1}{100}\left(G+\frac{m}{100}\right)$.
9. $\frac{567}{1100}$ nearly. 10. $20°$ and $30°$. 12. $20^g, 40^g, 80^g$.
13. $27°, 9°, 18°$. 14. (i) At $28\frac{4}{11}$ min. and 48 min. past 7. (ii) At 7-10. 15. $20°, 60°, 100°$.
16. $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$; $\frac{\pi}{21}, \frac{4\pi}{21}, \frac{16\pi}{21}$.
17. $45°, 60°, 120°, 135°$. 18. 9.
19. mx and nx where $x = \frac{2(10pm-9qn)}{mn\,(10p-9q)}$. 20. $\frac{3}{4}$.
21. 3 and 6. 22. 51·41 miles per hour (nearly).
23. 66444 miles per hour (nearly) ; 431445 miles (nearly).
24. 76·8 ft. (nearly). 25. 3959 miles (nearly). 26. 33 ft.
27. 360 yds.

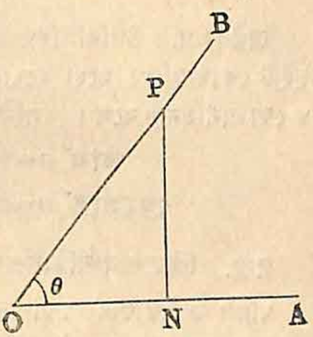
দ্বিতীয় অধ্যায়

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত

(Trigonometrical Ratios of Acute Angles)

2·1. কোণানুপাতের সংজ্ঞা।

মনে করি, OA এবং OB সরলরেখা পরস্পর ছেদ করার ফলে AOB—এই **সূক্ষ্মকোণটির** উৎপত্তি হইয়াছে। AOB কোণের মান আমরা গ্রীক্ অক্ষর θ (থিটা) দ্বারা সূচিত করিব। OB সরলরেখার উপর P একটি বিন্দু লইলাম। P-বিন্দু হইতে AOB কোণের অপর বাহু OA-র উপর PN লম্ব টানিলাম। অতঃপর PON একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইল। এই ত্রিভুজের AOB কোণ অর্থাৎ θ-র অনুপাতে PN-কে **বিপরীত বাহু**, ON-কে **সংলগ্ন বাহু**, এবং OP-কে **অতিভুজ** বলা হয়।



$\frac{PN}{OP}, \frac{ON}{OP}, \frac{PN}{ON}, \frac{OP}{PN}, \frac{OP}{ON}, \frac{ON}{PN}$, এই অনুপাতগুলিকে যথাক্রমে সাইন (sine), কোসাইন (cosine), ট্যানজেণ্ট (tangent), কোসেকাণ্ট (cosecant), সেকাণ্ট (secant) এবং কোট্যানজেণ্ট (cotangent) বলা হয়। অর্থাৎ,

$$\text{সাইন } \theta = \sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\text{কস } \theta = \cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{\text{সংলগ্ন বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\text{ট্যান } \theta = \tan\theta = \frac{PN}{ON} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সংলগ্ন বাহু}}$$

$$\text{কোসেক } \theta = \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PN} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}$$

$$\text{সেক } \theta = \sec\theta = \frac{OP}{ON} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সংলগ্ন বাহু}}$$

$$\text{কট } \theta = \cot\theta = \frac{ON}{PN} = \frac{\text{সংলগ্ন বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$$

এই ছয়টি অনুপাতকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত বলে।

দ্রষ্টব্য 1. কোন কোন লেখক PN কে লম্ব এবং ON কে ভূমি বলিয়া উল্লেখ করেন।

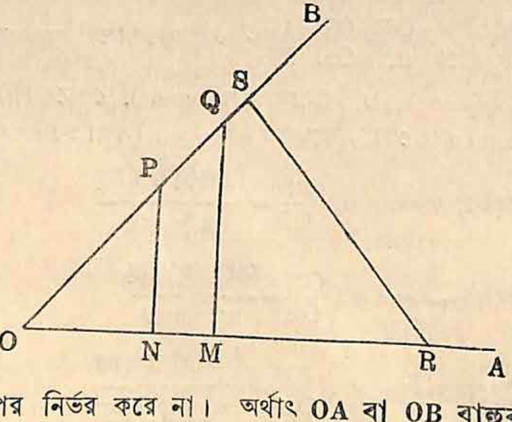
দ্রষ্টব্য 2. উপরিলিখিত কোণানুপাত ব্যতীত, θ কোণ-সম্বন্ধীয় আরও দুইটি কোণানুপাত মধ্যে মধ্যে ব্যবহৃত হইয়া থাকে; ইহাদিগকে ভার্সাইন θ ও কোভার্সাইন θ বলে। লিখিবার সময় সংক্ষেপ করিয়া আমরা লিখি

$$\text{ভার্স } \theta = \text{vers } \theta = 1 - \cos\theta$$

$$\text{কোভার্স } \theta = \text{covers } \theta = 1 - \sin\theta.$$

2·2. ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত পরিবর্তনহীন।

যদিও θ কোণের কোণানুপাতের সংজ্ঞা OPN ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত দ্বারা ব্যক্ত হইয়াছে, তথাপি ইহা কোনক্রমেই OPN ত্রিভুজের



আয়তনের উপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ **OA বা OB বাহুর যে-কোন একটির উপর** P বিন্দুটি অবস্থান করিতে পারে এবং অতঃপর P হইতে অপর বাহুর উপর লম্ব টানিলে OPN ত্রিভুজের উদ্ভব হইবে। তাহা হইলে

θ কোণের কোণানুপাত যে-কোন ত্রিভুজ OPN-এর বাহুগুলির অনুপাতের দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে এবং তাহারা সর্বদা সমান হইবে।

মনে করি, AOB কোণের মান θ। OB বাহুর উপর যে-কোন একটি বিন্দু P লইলাম; এবং OA বাহুর উপর PN লম্ব টানিলাম। OB-র উপর অপর একটি বিন্দু Q লওয়া হইল এবং Q হইতে OA-র উপরে QM লম্ব টানিলাম। অতঃপর OA-র যে-কোন একটি বিন্দু R লইয়া, R হইতে OB-র উপর RS লম্ব টানা হইল। অতএব, সংজ্ঞানুসারে

$$\triangle\text{PON ত্রিভুজ হইতে,}\quad \sin\theta=\frac{\text{PN}}{\text{OP}}$$

$$\triangle\text{QOM ত্রিভুজ হইতে,}\quad \sin\theta=\frac{\text{QM}}{\text{OQ}}$$

$$\triangle\text{ROS ত্রিভুজ হইতে,}\quad \sin\theta=\frac{\text{RS}}{\text{OR}}.$$

কিন্তু, যেহেতু PON, QOM ও ROS ত্রিভুজগুলি সদৃশকোণী,

$$\therefore\ \frac{\text{PN}}{\text{OP}}=\frac{\text{QM}}{\text{OQ}}=\frac{\text{RS}}{\text{OR}}.$$

অতএব, যে-কোন ত্রিভুজ PON বা QOM বা ROS-এর বাহুদ্বয়ের অনুপাতের দ্বারা $\sin\theta$ প্রকাশ করা যাউক না কেন, $\sin\theta$-র মান সর্বদা সমান থাকিবে। অর্থাৎ যে-কোন কোণের 'সাইন' শুধু কোণের পরিমাপের উপর নির্ভর করে। এইরূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে সমস্ত ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলি কেবলমাত্র কোণের উপর নির্ভর করে, সংজ্ঞাপ্রদানকারী ত্রিভুজের বাহুর উপর নয়।

দ্রষ্টব্য। প্রতিটি **ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত** দুইটি দৈর্ঘ্যের অনুপাত বলিয়া ইহা **একটি সংখ্যা, দৈর্ঘ্য নয়।**

2·3. ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলির মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ।

আমরা জানি, [§ 2·1 হইতে]

$$\textbf{cosec}\,\theta=\frac{\text{OP}}{\text{PN}}=\frac{1}{\text{PN/OP}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sin\theta}}\qquad\cdots\quad(1)$$

$$\textbf{sec}\,\theta=\frac{\text{OP}}{\text{ON}}=\frac{1}{\text{ON/OP}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\cos\theta}}\qquad\cdots\quad(2)$$

$$\cot\theta=\frac{ON}{PN}=\frac{1}{PN/ON}=\frac{1}{\tan\theta} \quad \cdots \quad (3)$$

পুনরায়, $$\tan\theta=\frac{PN}{ON}=\frac{PN/OP}{ON/OP}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \cdots \quad (4)$$

$$\cot\theta=\frac{ON}{PN}=\frac{ON/OP}{PN/OP}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \cdots \quad (5)$$

পুনরায়, $\triangle OPN$ সমকোণী ত্রিভুজ হইতে আমরা জানি

$$OP^2=PN^2+ON^2$$

যথাক্রমে OP^2, ON^2 এবং PN^2 দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\left(\frac{PN}{OP}\right)^2+\left(\frac{ON}{OP}\right)^2=1 \quad \cdots \quad (i)$$

$$\left(\frac{OP}{ON}\right)^2=\left(\frac{PN}{ON}\right)^2+1 \quad \cdots \quad (ii)$$

$$\left(\frac{OP}{PN}\right)^2=1+\left(\frac{ON}{PN}\right)^2 \quad \cdots \quad (iii)$$

এক্ষণে, $(\sin\theta)^2$-এর স্থানে সাধারণতঃ $\sin^2\theta$ লেখা হয় এবং অন্যান্য অনুপাতগুলির ঘাত অনুরূপভাবে লিখিত হয়।

অতএব, ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী (i), (ii), (iii) হইতে আমরা নিম্নলিখিত অভেদাবলী পাই—

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \cdots \quad (6)$$
$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \quad \cdots \quad (7)$$
$$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta \quad \cdots \quad (8)$$

(6), (7) এবং (8) হইতে নিম্নলিখিত অভেদাবলী পাওয়া যায়; যে-কোন ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী প্রমাণ করিতে ইহারা খুব কার্য্যকরী :

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta\;; \qquad \cos^2\theta=1-\sin^2\theta.$$
$$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1\;; \qquad \tan^2\theta=\sec^2\theta-1.$$
$$\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1\;; \qquad \cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1.$$

2·4. ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের মানের বিধি-নিষেধ।

ইহা পরে প্রমাণ করা হইবে যে, ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত ধনাত্মক বা

ঋণাত্মক হইতে পারে, কিন্তু **একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত সর্বদা ধনাত্মক হইবে।**

এক্ষণে, $\sin\theta = \frac{PN}{OP}$, $\cos\theta = \frac{ON}{OP}$.

কিন্তু, OP যেহেতু সমকোণী ত্রিভুজ OPN-এর অতিভুজ, OP বাহু PN এবং ON বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব, **কোন সূক্ষ্মকোণের সাইন এবং কোসাইন কখনও এক অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না।**

অনুরূপভাবে, **কোন সূক্ষ্মকোণের কোসেকাণ্ট এবং সেকাণ্ট কখনও এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।**

$$\tan\theta = \frac{PN}{ON}, \qquad \cot\theta = \frac{ON}{PN}$$

যেহেতু PN $>$ বা $<$ বা $=$ ON, কোন সূক্ষ্মকোণের ট্যানজেণ্ট এবং কোট্যানজেণ্টের যে-কোন ধনাত্মক মান হইতে পারে।

2·5. পূরক কোণের কোণানুপাত।

§ 2·1-এর চিত্র হইতে জানা যায় যে, $\angle$OPN কোণটি θ কোণ অর্থাৎ PON কোণের পূরক। $\angle$OPN কোণের মান ϕ (ফাই বলিয়া উচ্চারিত) দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে $\theta+\phi=90°$. $\angle$OPN কোণানুসারে, ON ইহার বিপরীত বাহু এবং PN ইহার সংলগ্ন বাহু।

$$\therefore \quad \sin\phi = \frac{ON}{OP} = \cos\theta; \qquad \cos\phi = \frac{PN}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan\phi = \frac{ON}{PN} = \cot\theta; \qquad \cot\phi = \frac{PN}{ON} = \tan\theta$$

ইত্যাদি।

যেহেতু $\phi = 90° - \theta$, অতএব, উপরোক্ত রাশিগুলির সমতা হইতে আমরা নিম্নোক্ত অভেদাবলী পাই—

$$\mathbf{\sin(90° - \theta) = \cos\theta; \qquad \cos(90° - \theta) = \sin\theta}$$

$$\mathbf{\tan(90° - \theta) = \cot\theta; \qquad \cot(90° - \theta) = \tan\theta}$$

এইরূপে, $\mathbf{\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta; \qquad \text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta.}$

2·6. প্রদত্ত কোণানুপাত হইতে অন্য কোণানুপাত নির্ণয়-পদ্ধতি।

§ 2·3 হইতে আমরা দেখিতে পাই যে, যে-কোন ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাত অন্যগুলির মাধ্যমে প্রকাশ করা যাইতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, যে-কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত tan θ-এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta};\quad \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta.$$

$$\therefore\quad \sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta};$$

এখানে যদিও বর্গমূল লওয়াতে রাশিটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে, কিন্তু আমরা ইহাকে ধনাত্মক বলিয়াই গণ্য করিব, কারণ θ সূক্ষ্মকোণ বলিয়া ইহার যে-কোন কোণানুপাত ধনাত্মক হইবে [§ 2·4 দেখ]।

সুতরাং, $$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}};$$

$$\operatorname{cosec}^2\theta = 1+\cot^2\theta = \frac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta};$$

$$\therefore\quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}.$$

2·7. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Prove that* $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta.$ [C. U. 1937]

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta.$$

Ex. 2. *Prove that* $\dfrac{1}{\sec A+\tan A} - \dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{1}{\sec A-\tan A}.$

$$\frac{1}{\sec A+\tan A} + \frac{1}{\sec A-\tan A}$$

$$= \frac{\sec A - \tan A + \sec A + \tan A}{(\sec A - \tan A)(\sec A + \tan A)}$$

$$= \frac{2 \sec A}{\sec^2 A - \tan^2 A} = 2 \sec A$$

$$= \frac{2}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos A}.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া

$$\frac{1}{\sec A + \tan A} - \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\sec A - \tan A}.$$

Ex. 3. *Prove that*

$$\frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)(\cot \theta + \tan \theta)} = \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta).$$

$$\frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)(\cot \theta + \tan \theta)} = \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)}$$

$$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{(\sin \theta + \cos \theta)\left(\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}\right)}$$

$$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta) \sin \theta \cos \theta}{1}$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta) \sin \theta \cos \theta.$$

Ex. 4. *If* $15 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta = 7$, *find* $\tan \theta$, θ *being an acute angle.*

এখানে, $15(1 - \cos^2 \theta) + 2 \cos \theta = 7$

বা, $15 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 8 = 0$

বা, $(5 \cos \theta - 4)(3 \cos \theta + 2) = 0$

সুতরাং, $\cos \theta = \frac{4}{5}$ বা $-\frac{2}{3}$.

কিন্তু, θ সূক্ষ্মকোণ হইলে $\cos \theta$ ঋণাত্মক হইতে পারে না।

$\therefore \cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$;

$\therefore \sin \theta = \pm \frac{3}{5}$. পুনরায় θ সূক্ষ্মকোণ বলিয়া ঋণাত্মক মান গণ্য করা হইবে না। অতএব, $\sin \theta = \frac{3}{5}$.

সুতরাং, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$.

দ্রষ্টব্য। কিন্তু θ সূক্ষ্মকোণ না হইলে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ উভয়েই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে (চতুর্থ অধ্যায়, 4·1 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)। তখন আমরা $\tan\theta$-র আরও মান পাইব, তাহা নিম্নে দেওয়া হইল :—

এক্ষণে, $\sin\theta = \pm\frac{3}{5}$; অতএব, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \pm\frac{3}{4}$

আবার, $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ হইলে, $\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$;

$\therefore \quad \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$;

সুতরাং, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

অতএব, $\tan\theta$-এর চারিটি মান পাওয়া গেল : $\pm\frac{3}{4}, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ex. 5. *Is it possible to find a value of θ if $\sec\theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, x and y being two real and unequal numbers ? Justify your answer.*

এখানে দেওয়া আছে $\sec\theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

আমরা জানি, θ-র যে-কোন মানের জন্য $\sec\theta$ কখনও '1' অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না। [§ 2·4 দ্রষ্টব্য]

কিন্তু যেহেতু x এবং y দুইটি অসম বাস্তব রাশি, স্বভাবতঃই

$$x^2 - y^2 < x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} < 1$$

অর্থাৎ, $\sec\theta < 1$, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

অতএব, θ-র এমন কোন মান নাই যাহার জন্য $\sec\theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ হইবে।

Ex. 6. *Eliminate θ between $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$.*

এখানে, $\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sec\theta. \\ \frac{y}{b} &= \tan\theta. \end{aligned}\right\}$ কিন্তু, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1.$

অতএব, $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

Ex. 7. *If $a^2 sec^2 x - b^2 tan^2 x = c^2$, find cosec x.*

$$a^2 \sec^2 x - b^2 \tan^2 x = c^2 = c^2(\sec^2 x - \tan^2 x).$$

বা, $(a^2 - c^2) \sec^2 x = (b^2 - c^2) \tan^2 x.$

বা, $\dfrac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$

বা, $\operatorname{cosec}^2 x = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} x = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$

Ex. 8. *If $x = r \cos\theta \cos\phi$, $y = r \cos\theta \sin\phi$, $z = r \sin\theta$, show that $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.*

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\theta \cos^2\phi + r^2 \cos^2\theta \sin^2\phi$$
$$= r^2 \cos^2\theta (\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r^2 \cos^2\theta.$$

$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2.$

Ex. 9. *Show that* $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}.$

বাম পক্ষ $= \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2 = \dfrac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \dfrac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta}$

$= \dfrac{(1 + \sin\theta)^2}{(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)} = \dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} =$ ডান পক্ষ।

Ex. 10. *If $k \tan\theta = \tan k\theta$, prove that*

$$\frac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \frac{k^2}{1 + (k^2 - 1)\sin^2\theta}.$$

$$\frac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2 k\theta}{\cos^2 k\theta} \cdot \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\tan^2 k\theta}{\sec^2 k\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\tan^2 k\theta}{1 + \tan^2 k\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{k^2 \tan^2\theta}{1 + k^2 \tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{k^2 \sin^2\theta}{\cos^2\theta + k^2 \sin^2\theta}$$

$\left[\because \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$

$$= \frac{k^2}{1 - \sin^2\theta + k^2 \sin^2\theta} = \frac{k^2}{1 + (k^2 - 1)\sin^2\theta}.$$

Examples II

Prove the following indentities (*Ex. 1 to 24*) :—

1. $\dfrac{\sin A+\cos A}{\sec A+\operatorname{cosec} A}=\sin A\cos A.$

2. $\cot\theta+\tan\theta=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta.$

3. $\dfrac{1}{1+\tan A}=\dfrac{\cot A}{1+\cot A}.$

4. $\operatorname{cosec}^6 A-\cot^6 A=1+3\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A.$

5. $\cos^6 A+\sin^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A.$

6. $\dfrac{1}{\cos^2 A}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A-1}=1.$

7. $\cos A+\tan A\sin A=\sec A.$

8. $\sec^4 A+\tan^4 A=1+2\sec^2 A\tan^2 A.$

9. $\dfrac{1+3\cos\theta-4\cos^3\theta}{1-\cos\theta}=(1+2\cos\theta)^2.$

10. $(\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2=\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}.$

11. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}=\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2.$

12. $\dfrac{\tan^2\alpha-\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$

13. $1+\tan\theta+\sec\theta=\dfrac{2}{1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta}.$

14. $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.$

15. $\dfrac{\sin A-2\sin^3 A}{2\cos^3 A-\cos A}=\tan A.$

16. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}-\sec\theta=\sec\theta-\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}.$

17. $\dfrac{\operatorname{cosec} A+\cot A}{\operatorname{cosec} A-\cot A}=\dfrac{\sin^2 A}{(1-\cos A)^2}.$

18. $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$.

19. $\dfrac{\sec\theta+\tan\theta}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}-\dfrac{\sec\theta-\tan\theta}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}=2(\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta)$.

20. $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta}=1$.

21. $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$.

22. $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta-1}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=2\cot\theta$.

23. $\dfrac{\cos\theta+\cos\phi}{\sin\theta-\sin\phi}=\dfrac{\sin\theta+\sin\phi}{\cos\phi-\cos\theta}$.

24. $1+4\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta=(\operatorname{cosec}^2\theta+\cot^2\theta)^2$.

25. Express $1-2\sin\theta\cos\theta$ as a perfect square.

26. Express $2\sec^2\theta-\sec^4\theta-2\operatorname{cosec}^2\theta+\operatorname{cosec}^4\theta$ in terms of $\tan\theta$.

27. Prove that

$$(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

28. If $\sin A+\sin^2 A=1$, then $\cos^2 A+\cos^4 A=1$.

29. (i) If $\sin\theta-\cos\theta=0$, prove that $\sec\theta=\sqrt{2}$.

(ii) If $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4$, show that $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(iii) If $3\sin\theta+4\cos\theta=5$, show that $\sin\theta=\frac{3}{5}$.

30. If $\tan\theta+\sec\theta=x$, show that $\sin\theta=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

31. If $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$, find the value of $\dfrac{a\sin\theta-b\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}$.

32. If $1+4x^2=4x\sec A$, prove that

$$\sec A+\tan A=2x \text{ or } 1/2x.$$

33. Express $\sin\alpha$ in terms of $\sec\alpha$, and $\sec\theta$ in terms of $\cot\theta$.

34. Given $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\phi=\frac{12}{13}$, where θ and ϕ are acute angles, find the value of $\dfrac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}$.

35. If $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha$, prove that

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha.$$

36. If $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, find $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$.

37. If $1 + \sin^2 A = 3 \sin A \cos A$, find $\tan A$.

38. If $\tan \theta + \sin \theta = m$, $\tan \theta - \sin \theta = n$, prove that

$$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}.$$

39. If $(a^2 - b^2) \sin \theta + 2ab \cos \theta = a^2 + b^2$, find $\tan \theta$ and $\operatorname{cosec} \theta$.

40. If $\tan \theta = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$, prove that

$$\sqrt{2} \cos \theta = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

41. Given $\tan^2\theta = 1 - e^2$, show that

$$\sec \theta + \tan^3\theta \operatorname{cosec} \theta = (2 - e^2)^{\frac{3}{2}}.$$

42. If x and y are two unequal real quantities, show that the equations (i) $\sin^2\theta = \frac{(x+y)^2}{4xy}$ and (ii) $\cos \theta = x + \frac{1}{x}$ are both impossible.

43. Eliminate θ between

(i) $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$.

(ii) $x = c(\sec \theta + \tan \theta)$, $y = c(\sec \theta - \tan \theta)$.

(iii) $a \cos \theta + b \sin \theta + c = 0$, $a' \cos \theta + b' \sin \theta + c' = 0$.

(iv) $a \tan^2\theta + b \tan \theta + c = a' \cot^2\theta + b' \cot \theta + c' = 0$.

ANSWERS

25. $(\sin \theta - \cos \theta)^2$. 26. $\frac{1}{\tan^4\theta} - \tan^4\theta$. 31. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

33. $\frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec \alpha}$; $\frac{\sqrt{1 + \cot^2\theta}}{\cot \theta}$. 34. $\frac{16}{63}$. 36. $\frac{1}{2}$. 37. 1 or $\frac{1}{2}$.

39. $\frac{a^2 - b^2}{2ab}$; $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$. 43. (i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (ii) $xy = c^2$.

(iii) $(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 = (ab' - a'b)^2$.

(iv) $(a'b - b'c)(ab' - bc') = (aa' - cc')^2$.

Examples II(A)

Prove the following identities (*Ex. 1 to 18*) :—

1. $\dfrac{\tan^3\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{\cot^3\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\dfrac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

2. $(\tan\theta+\cot\theta+\sec\theta)(\tan\theta+\cot\theta-\sec\theta)=\operatorname{cosec}^2\theta$.

3. $\sin\theta\,(1+\tan\theta)+\cos\theta\,(1+\cot\theta)=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$.
[*C. U. 1935*]

4. $(1+\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2=4\,(1-\sin\alpha\cos\alpha)$.

5. $\sin^6\alpha+\sin^4\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^4\alpha-\cos^6\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

6. $3\,(\sin\theta+\cos\theta)-2\,(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)^3$.

7. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}$.

8. $\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos y}+\dfrac{\cos y}{\sin y-\cos x}=\dfrac{\cos x}{\sin x-\cos y}+\dfrac{\cos y}{\sin y+\cos x}$.

9. $(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2=\tan^2\theta+\cot^2\theta+7$.

10. $(\sec\theta-\cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=1$.

11. $\dfrac{1+(\operatorname{cosec}x\tan y)^2}{1+(\operatorname{cosec}z\tan y)^2}=\dfrac{1+(\cot x\sin y)^2}{1+(\cot z\sin y)^2}$.

12. $\sec^3\alpha\operatorname{cosec}^3\alpha-3\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha=\tan^3\alpha+\cot^3\alpha$.

13. $\sin^6A-\cos^6A=(\sin A+\cos A)(\sin A-\cos A)$
$\times(1+\sin A\cos A)(1-\sin A\cos A)$.

14. $\dfrac{\tan\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^2}+\dfrac{\cot\alpha}{(1+\cot^2\alpha)^2}=\sin\alpha\cos\alpha$.

15. $\sin^2\theta\tan\theta-\cos^2\theta\cot\theta+\sec\theta\operatorname{cosec}\theta=2\tan\theta$.

16. $\dfrac{\cos^2A-\sin^2A}{\sin A\cos^2A-\cos A\sin^2A}=\operatorname{cosec}A+\sec A$.

17. $\dfrac{\tan^2A+\cot^2A}{\tan^2A-\cot^2A}=\dfrac{\sin^4A+\cos^4A}{\sin^2A-\cos^2A}$.

18. $(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)^2=1$.

19. If $\cos^2A-\sin^2A=\tan^2B$, then $\cos^2B-\sin^2B=\tan^2A$.

20. If $\sin^4 x + \sin^2 x = 1$, then $\tan^4 x - \tan^2 x = 1$.

21. Show that the difference between $3 \sin^4\theta - 2 \sin^6\theta$ and $2 \cos^6\theta - 3 \cos^4\theta$ is the same for all values of θ.

22. If $x = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$, show that $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$.

23. If $\tan^2 A = 1 + 2\tan^2 B$, show that $\cos^2 B = 2\cos^2 A$.

24. If $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$, then $\sin\alpha - \cos\alpha = \pm 1$.

25. If $a\cos\theta - b\sin\theta = c$, then show that

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}.$$

26. If $(1+\sin x)(1+\sin y)(1+\sin z)$

$$= (1-\sin x)(1-\sin y)(1-\sin z),$$

prove that each is equal to $\pm\cos x\cos y\cos z$.

27. If $x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$, and $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$, then $x^2+y^2=1$. [*C. U. 1937*]

28. If $\sin A = \dfrac{\sin x + \sin y}{1+\sin x\sin y}$, show that

$$\cos A = \pm\frac{\cos x\cos y}{1+\sin x\sin y}.$$

29. (i) If $\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = 2$, then $\sin^n\alpha + \operatorname{cosec}^n\alpha = 2$.

(ii) If $\sec\alpha = \sec\beta\sec\gamma + \tan\beta\tan\gamma$,

then $\sec\beta = \sec\gamma\sec\alpha \pm \tan\gamma\tan\alpha$.

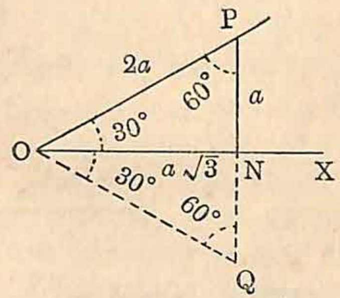
30. If $\dfrac{\cos^4 x}{\cos^2 y} + \dfrac{\sin^4 x}{\sin^2 y} = 1$, then $\dfrac{\cos^4 y}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^4 y}{\sin^2 x} = 1$.

তৃতীয় অধ্যায়

কয়েকটি বিশিষ্ট কোণের কোণানুপাত

3·1. 30°-এর কোণানুপাত।

মনে করি, আবর্তনকারী সরলরেখা OX হইতে আবর্তন আরম্ভ করিয়া 30° ডিগ্রির সমান XOP কোণ উৎপন্ন করে। OP-র উপরিস্থিত P বিন্দু হইতে OX-এর উপর PN লম্ব টানা হইল ; অতএব, $\angle OPN = 60°$.



PN-কে Q পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হইল যে, NP = NQ ; OQ যুক্ত করা হইল। ইহা সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, PON এবং QON ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ; অতএব,

$$\angle OQN = \angle OPN = 60° ;$$

সুতরাং OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। অর্থাৎ, OP = PQ = 2PN.

উপরের চিত্র হইতে দেখা যায় যে, $PN = a$ হইলে, $OP = 2a$; এবং $ON = \sqrt{OP^2 - PN^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. [যেহেতু, $\angle PON = 30°$, একটি সূক্ষ্মকোণ, অতএব ON, PN এবং OP বাহুগুলি প্রত্যেকেই ধনাত্মক হইবে।]

সুতরাং, $$\sin 30° = \sin PON = \frac{PN}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos 30° = \frac{ON}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{PN}{ON} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \frac{ON}{PN} = \sqrt{3}$$

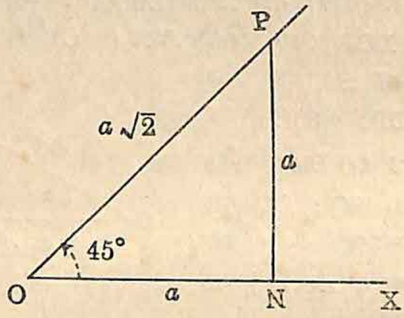
$$\text{cosec } 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2$$

$$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3·2. 45°-এর কোণানুপাত।

মনে করি, $\angle XOP = 45°$; P হইতে OX-এর উপর PN লম্ব টানিলাম। অতঃপর, PON সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PON = 45°$.

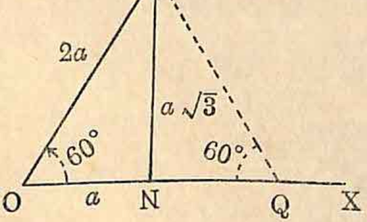
অতএব, $\angle OPN = 45°$ এবং $ON = PN$. মনে করি, $ON = PN = a$; সুতরাং, $OP = \sqrt{ON^2 + PN^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.



সুতরাং,
$$\sin 45° = \frac{PN}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos 45° = \frac{ON}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 45° = \frac{PN}{ON} = 1.$$
$$\sec 45° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}\ ;\ \cot 45° = 1.$$

3·3. 60°-এর কোণানুপাত।

মনে করি, $\angle XOP = 60°$, এবং PN সরলরেখা OX-এর উপর লম্ব। OX হইতে ON-এর সমান করিয়া NQ কাটিয়া লওয়া হইল। PQ যোগ করা হইল। অতঃপর, ইহা প্রমাণ করা যায় যে, OPN এবং QPN ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব, $\angle PON = \angle PQN = 60°$. অর্থাৎ, POQ ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ; সুতরাং, $OP = OQ = 2ON$.



ON $= a$ লিখিলে, OP $= 2a$. অতএব, PN $= \sqrt{OP^2 - ON^2} = \sqrt{4a^2 - a^2}$ $= a\sqrt{3}$.

সুতরাং, $\mathbf{\sin 60^\circ = \frac{PN}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$\mathbf{\cos 60^\circ = \frac{ON}{OP} = \frac{1}{2}}$$

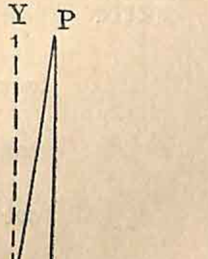
$$\mathbf{\tan 60^\circ = \frac{PN}{ON} = \sqrt{3}.}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ \sec 60^\circ = 2\ ;\ \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

দ্রষ্টব্য। কোণানুপাতের মান হইতে ইহা সহজেই লক্ষ্য করা যায় যে, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$, $\tan 60^\circ = \cot 30^\circ$, $\cot 60^\circ = \tan 30^\circ$; $\sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ$, $\operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ$. পরবর্তী অধ্যায়ে ইহা আরও ব্যাপকভাবে প্রমাণ করা হইবে যে, দুইটি কোণ পরস্পর পূরক হইলে, একটির সাইন অপরটির কোসাইনের সমান হইবে এবং ইহার বিপরীত প্রক্রিয়া ; একটির ট্যানজেণ্ট অপরটির কোট্যানজেণ্টের সমান হইবে এবং ইহার বিপরীত প্রক্রিয়া ; একটির সেকাণ্ট অপরটির কোসেকাণ্টের সমান হইবে এবং ইহার বিপরীত প্রক্রিয়া। 45° নিজেই নিজের পূরক কোণ হওয়ায় ইহার সাইন এবং কোসাইন পরস্পর সমান হইবে,—ইহা § 3·2-তে দেখানো হইয়াছে।

3·4. 90°-র কোণানুপাত।

মনে করি, XOP এমন একটি সূক্ষ্মকোণ যাহার মান প্রায় 90° ডিগ্রির সমান। OX-এর উপর PN লম্ব টানিলে, ON অংশ অত্যন্ত ক্ষুদ্র হইবে, এবং XOP কোণ যতই 90° ডিগ্রির নিকটবর্তী হইবে, ON ততই ক্ষুদ্রতর হইতে থাকিবে। কিন্তু OP সরলরেখার দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান থাকিবে এবং PN সরলরেখা OP-এর নিকটবর্তী হইতে থাকিবে। পরিশেষে, যখন XOP কোণ 90°-ডিগ্রির সমান হইবে, তখন OP ও PN মিশিয়া যাইবে, এবং ON-এর দৈর্ঘ্য শূন্য হইয়া যাইবে। অতএব, $\frac{PN}{OP}$ এর মান 1 হইবে এবং $\frac{ON}{OP}$ এর মান শূন্য হইবে।



সুতরাং, $\sin 90° = \frac{PN}{OP}$ (সীমাস্থ মান) $= 1$

$\cos 90° = \frac{ON}{OP}$ (সীমাস্থ মান) $= 0$

$$\tan 90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0} *$$

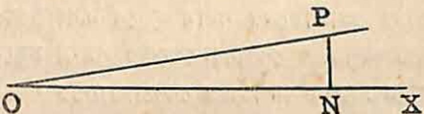
$$\cot 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{cosec} 90° = \frac{1}{\sin 90°} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 90° = \frac{1}{\cos 90°} = \frac{1}{0}.*$$

3·5. 0°-এর কোণানুপাত।

মনে করি, $\angle XOP$ একটি অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক কোণ এবং PN সরলরেখা OX-এর উপর লম্ব। অতএব, $\angle XOP$ যতই ক্ষুদ্রতর হইবে, PN-এর দৈর্ঘ্য ততই ক্ষুদ্র হইবে, কিন্তু OP-এর দৈর্ঘ্য সর্বদা সসীম থাকিবে।



এক্ষণে XOP কোণকে ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর করিলে, পরিশেষে যখন ইহা যে-কোন ক্ষুদ্র সংখ্যা হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে, তখন ইহাকে 0° কোণ বলিয়া সূচিত করা হইবে ; এই ক্ষেত্রে কার্যতঃ, PN বিলুপ্ত হইবে এবং OP ও ON সরলরেখা সর্বদাই সীমাবদ্ধ থাকিবে এবং পরিশেষে তাহারা মিশিয়া যাইবে। অতএব, $\frac{PN}{OP}$ অনুপাত অবশেষে শূন্য হইয়া যাইবে এবং $\frac{ON}{OP}$ অনুপাত 1 হইবে।

সুতরাং, $\sin 0° = \frac{PN}{OP}$ (সীমাস্থ মান) $= 0$

$\cos 0° = \frac{ON}{OP}$ (সীমাস্থ মান) $= 1$

$$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 0° = \frac{\cos 0°}{\sin 0°} = \frac{1}{0} *$$

$$\operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\sin 0°} = \frac{1}{0} *$$

$$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = \frac{1}{1} = 1$$

দ্রষ্টব্য। $0°$ এবং $90°$ পরস্পর পূরক কোণ বলিয়া, $\sin 90° = \cos 0°$, $\cos 90° = \sin 0°$; ইত্যাদি।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। $90°$ ও $0°$ ডিগ্রি কোণানুপাতগুলির মান নির্ণয় করিতে গিয়া আমাদিগকে উপরোক্ত তারকাচিহ্নিত স্থানগুলিতে আসিয়া 0-দ্বারা একটি সসীম সংখ্যাকে ভাগ করিতে হইতেছে। ভাগের সংজ্ঞানুসারে, a-সংখ্যাকে b-দ্বারা ভাগ করিয়া আমরা এমন একটি সংখ্যা c পাইব (অবশ্য এইরূপ কোন সংখ্যা c থাকিলে), যাহাতে $a = b \times c$ হয়। এক্ষণে, মনে করি, 1-কে 0-দ্বারা ভাগ করিলে আমরা x-সংখ্যাটি পাই। অতএব, $1 = 0 \times x = 0$, কিন্তু ইহা অসম্ভব। এতদ্বারা প্রমাণ হইতেছে যে, **কোন সসীম সংখ্যাকে 0-দ্বারা ভাগ করা যায় না।** অতএব, **tan 90°, sec 90°, cot 0°** এবং **cosec 0°** —এই চারিটি অনুপাতের মান নির্ণয় করা যায় না ; অর্থাৎ তাহারা অনির্দিষ্ট (undefined).

3·6. $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$ এই কয়েকটি বিশেষ কোণের কোণানুপাতের মান সর্বদাই ব্যবহৃত হয় বলিয়া ইহাদের বিশেষভাবে মনে রাখিতে হইবে। প্রত্যেকটি কোণের প্রথম তিনটি কোণানুপাতের মানের তালিকা, নিম্নে দেওয়া হইল ; অবশিষ্ট তিনটি কোণের কোণানুপাত ইহাদের বিপরীত রাশিগুলি হইবে

angle	sine	cosine	tangent
$0°$ or 0^c	0	1	0
$30°$ or $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$ or $\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$ or $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$ or $\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm \infty$

3·7. উদাহরণমালা

Ex. 1. $\theta = 30°$ হইলে, $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, ইহার সত্যতা নির্ণয় কর।

এস্থলে, $\cos 2\theta = \cos 60° = \frac{1}{2}$ এবং $\tan\theta = \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2};\ \text{অতএব}\ \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}.$$

Ex. 2. $\sin 30° = \sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30°$. *Verify this.*

দক্ষিণ পক্ষে মানগুলি যথাক্রমে বসাইলে, দক্ষিণ পক্ষ

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \sin 30°.$$

Ex. 3. *Solve for θ, where θ is a positive acute angle, given* $\operatorname{cosec}\theta \cot\theta = 2\sqrt{3}$.

এখানে, $\operatorname{cosec}\theta\cot\theta = 2\sqrt{3}$ বা, $\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = 2\sqrt{3}$

বা, $\cos\theta = 2\sqrt{3}\sin^2\theta = 2\sqrt{3}(1-\cos^2\theta)$.

বা, $2\sqrt{3}\cos^2\theta + \cos\theta - 2\sqrt{3} = 0$.

বা, $2\sqrt{3}\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3\cos\theta - 2\sqrt{3} = 0$

বা, $(\sqrt{3}\cos\theta + 2)(2\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$

অর্থাৎ, $\cos\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

কিন্তু, θ-সূক্ষ্মকোণ হইলে $\cos\theta$ কখনও 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং ঋণাত্মক হইতে পারে না; অতএব $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

অর্থাৎ, $\theta = 30°$.

Ex. 4. *Evaluate* $\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$$\left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= (\sin 30° + \cos 30°)(\sin 60° - \cos 60°)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Ex. 5. *If $A=30^\circ$, prove that $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$.*

$\sin 3A=\sin 90^\circ=1.$

$3\sin A-4\sin^3 A=3\sin 30^\circ-4\sin^3 30^\circ$

$$=3.\tfrac{1}{2}-4.\tfrac{1}{8}=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}=1.$$

$\therefore\quad \sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.$

Ex. 6. *Find x from the equation*

$$x\sin 30^\circ\cos^2 45^\circ=\frac{\cot^2 30^\circ\sec 60^\circ\tan 45^\circ}{\operatorname{cosec}^2 45^\circ\operatorname{cosec} 30^\circ}$$

$$x=\frac{\cot^2 30^\circ\sec 60^\circ\tan 45^\circ}{\sin 30^\circ\cos^2 45^\circ\operatorname{cosec}^2 45^\circ\operatorname{cosec} 30^\circ}$$

$$=\frac{(\sqrt{3})^2.2.1}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot(\sqrt{2})^2.2}=6.$$

Ex. 7. *If A, B, C be the angles of a triangle having no obtuse angle, such that*

$$\sin(B+C-A)=1 \quad \cdots \quad (1)$$

$$\cos(C+A-B)=1 \quad \cdots \quad (2)$$

find A, B, C.

যেহেতু, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°, অতএব

$$A+B+C=180^\circ \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, $B+C-A$ এবং $C+A-B$ কোণদ্বয় 180° হইতে ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণ হইবে ; কারণ A, B, C কোণত্রয় স্থূলকোণ না হওয়ায়, $B+C-A=A+B+C-2A=180^\circ-2A$, এবং $C+A-B=180^\circ-2B$ ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অতএব, (1) ও (2) হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$B+C-A=90^\circ \quad \cdots \quad (4)$$

$$C+A-B=0^\circ \quad \cdots \quad (5)$$

এখন, (3) ও (4) হইতে আমরা পাই $2A = 90°$; $\therefore \; A = 45°$

(3) ও (5) " " " $2B = 180°$; $\therefore \; B = 90°$;

সুতরাং $C = 45°$.

Ex. 8. *Show that* $\dfrac{\tan 64° + \cot 26°}{\cot 64° + \tan 26°} = \tan 64° \cot 26°$.

বাম পক্ষ $= \dfrac{\tan 64° + \cot 26°}{\dfrac{1}{\tan 64°} + \dfrac{1}{\cot 26°}} = \dfrac{\tan 64° + \cot 26°}{\dfrac{\cot 26° + \tan 64°}{\tan 64° \cot 26°}} = \tan 64° \cot 26°$.

Examples III

Verify the results (*Ex. 1 to 6*) :—

1. $1 - 2\sin^2 30° = 2\cos^2 30° - 1 = \cos 60°$.

2. $\dfrac{2\tan 30°}{1 - \tan^2 30°} = \sqrt{3}$.

3. $\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$.

4. (i) $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$,

(ii) $\cos A = \cos^2 B - \sin^2 B$,

where $A = 60°$, $B = 30°$.

5. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$, where $A = \frac{1}{6}\pi$.

6. $\operatorname{cosec}^2 45° \sec^2 30° (\sin^3 30° + 4\cot^2 45° - \sec^2 60°) = \frac{1}{3}$

7. If $\tan^2\dfrac{\pi}{4} - \cos^2\dfrac{\pi}{3} = x \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{3}$, find x.

8. If θ be a positive acute angle, find θ, when

(i) $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$.

(ii) $\tan\theta + \cot\theta = 2$.

(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta + 5 = 3\sqrt{3}\cot\theta$.

(iv) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$.

(v) $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$.

(vi) $6 \sin^2\theta - 11 \sin\theta + 4 = 0.$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$

9. Given θ and ϕ to be positive acute angles, and $\tan(\theta + \phi) = \sqrt{3}$, $\tan(\theta - \phi) = 1$, determine θ and ϕ.

10. Find α and β (α and β being positive acute angles), if

$$\sin(2\alpha - \beta) = 1,$$

and $$\cos(\alpha + \beta) = \tfrac{1}{2}.$$

11. Find A, B, C (A, B, C being positive acute angles), if

$$\sin(B + C - A) = 1,$$

$$\cos(C + A - B) = 1,$$

and $$\tan(A + B - C) = 1.$$

12. Find the numerical values of :—

(i) $\cot^2 \dfrac{\pi}{6} - 2\cos^2 \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3}{4}\sec^2 \dfrac{\pi}{4} - 4\sec^2 \dfrac{\pi}{6}.$

(ii) $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\cot^2 30^\circ + \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ.$

ANSWERS

7. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ 8. (i) 60°. (ii) 45°. (iii) 30° (There is another angle which is not one of the standard angles).
(iv) 45°. (v) 30°. (vi) 30°. (vii) 30°.

9. $\theta = 52\frac{1}{2}^\circ$, $\phi = 7\frac{1}{2}^\circ$.
10. $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 10^\circ$.

11. $A = 22\frac{1}{2}^\circ$, $B = 67\frac{1}{2}^\circ$, $C = 45^\circ$.
12. (i) $-\frac{13}{3}$. (ii) 1.

চতুর্থ অধ্যায়

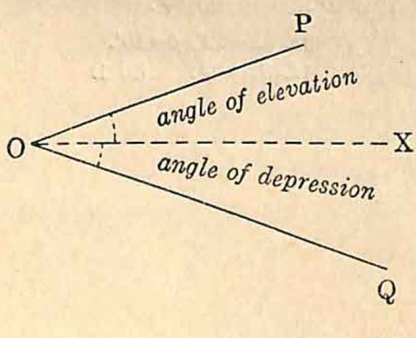
উচ্চতা ও দূরত্ব-বিষয়ক সহজ প্রশ্নাবলী

(Easy Problems on Heights and Distances)

4·1. যে সমস্ত ক্ষেত্রে কোন বস্তুর দূরত্ব বা উচ্চতা প্রত্যক্ষভাবে পরিমাপ করা যায় না, সেই সমস্ত ক্ষেত্রে ঐ বস্তুর দ্বারা দর্শকের চক্ষুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ লইয়া ত্রিকোণমিতিক সূত্রের সাহায্যে ঐ বস্তুর উচ্চতা বা দূরত্ব নির্ণয় করা যায় ;— এই সকল দূরত্ব বা উচ্চতা নির্ণয়কার্যে ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ অত্যন্ত ব্যাপক। দর্শকের চক্ষুতে উৎপন্ন কোণ ষষ্ঠক (sextant) বা থিয়োডোলাইট (Theodolite) অথবা অন্য কোন কোণ-পরিমাপক যন্ত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। এই কারণে জরিপের কাজে ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ অপরিহার্য। জ্যোতির্বিদেরাও চন্দ্র, সূর্য, নক্ষত্র প্রভৃতি আকাশের বস্তুগুলির দূরত্ব নির্ণয়ে ত্রিকোণমিতি খুব ব্যাপকভাবে প্রয়োগ করিয়া থাকেন।

ব্যবহারিক প্রয়োগের ক্ষেত্রে দুইটি কোণ বিশেষভাবে ব্যবহৃত হয় ; তাহাদের সংজ্ঞা নিম্নে দেওয়া হইল :—

দর্শকের চক্ষুর অবস্থান O হইতে OX একটি অনুভূমিক (horizontal) রেখা টানিলে, অনুভূমিক রেখা OX হইতে উপরে অবস্থিত একটি বিন্দু P-এর সহিত O-বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাটি OX-এর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে বলা হয় O-বিন্দু হইতে দৃষ্ট P-বিন্দুর **উন্নতি-কোণ** (angle of elevation or altitude)।

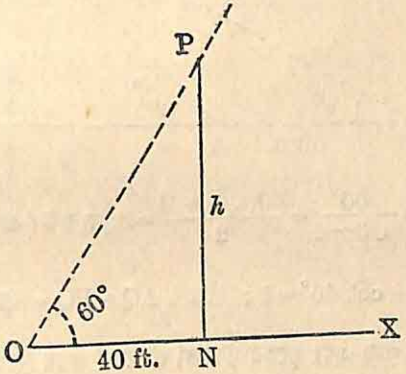


অনুরূপভাবে, OX-এর নিম্নে অবস্থিত Q একটি বিন্দু হইলে XOQ কোণের পরিমাপ ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে লওয়া হয় এবং এই কোণকে Q বিন্দুর **অবনতি-কোণ** (angle of depression) বলে।

4·2. উদাহরণমালা

Ex. 1. *From a distance of 40 feet from the foot of a palm tree in a horizontal field, the angle of elevation of the top of the tree is observed to be 60°. Find the height of the tree.*

মনে করি, বৃক্ষ PN-এর উচ্চতা h ফুট ; N বিন্দুর মধ্য দিয়া XN অনুভূমিক রেখার উপর O-বিন্দুটি এমন লওয়া হইল যাহাতে ON = 40 ফুট হয়।



অতঃপর ∠NOP কোণ O-বিন্দু হইতে দৃষ্ট P-বিন্দুর উন্নতি কোণ। অতএব ∠NOP = 60°.

$$\therefore \quad \frac{h}{40} = \tan \text{PON} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

$\therefore \quad h = 40\sqrt{3}$ ফুট = 69·28··· ফুট।

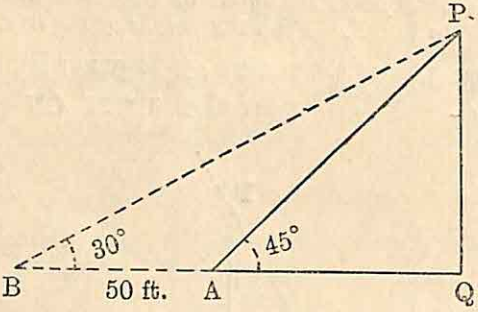
Ex. 2. *From one bank of a river, the top of a building just on the opposite bank is observed to have an elevation of 45°. On receding 50 ft. from the bank, perpendicular to its edge, the angle of elevation becomes 30°. Find the breadth of the river and the height of the building.*

AQ নদীর প্রস্থ এবং PQ গৃহের উচ্চতা হইলে, ∠PAQ = 45° ; পুনরায় AB = 50 ফুট ধরিলে, ∠PBQ = 30°.

এক্ষণে, $\frac{\text{BQ}}{\text{PQ}} = \cot 30°$, $\frac{\text{AQ}}{\text{PQ}} = \cot 45°$.

অতএব বিয়োগ করিলে, $\frac{\text{AB}}{\text{PQ}} = \cot 30° - \cot 45°$

অর্থাৎ, $\frac{50}{PQ} = \sqrt{3} - 1$



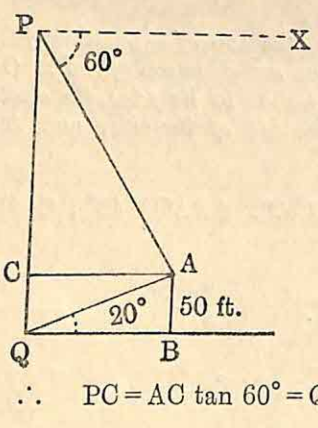
$\therefore \quad PQ = \frac{50}{\sqrt{3}-1} = \frac{50(\sqrt{3}+1)}{2} = 68{\cdot}3$ ফুট (প্রায়)।

পুনরায়, $\frac{AQ}{PQ} = \cot 45° = 1$; $\therefore \quad AQ = PQ = 68{\cdot}3$ ফুট (প্রায়)।

সুতরাং, নদীর প্রস্থ এবং গৃহের উচ্চতা উভয়েই প্রায় 68·3 ফুট।

Ex. 3. *The angles of depression and elevation of the top of a tower 50 ft. high from the top and bottom of a second tower are 60° and 20° respectively. Find the height of the second tower to the nearest foot.* [*Given cot 20° = 2·747*]

মনে করি, AB, 50 ফুট উচ্চ একটি স্তম্ভ, এবং PQ অপর একটি স্তম্ভ (অর্থাৎ দ্বিতীয় স্তম্ভ)। অতএব, $\angle XPA = 60°$ এবং $\angle AQB = 20°$. AC সরল-রেখা BQ অথবা PX-এর সমান্তরাল হইলে $\angle PAC =$ একান্তর $\angle XPA = 60°$.



এক্ষণে, $\frac{QB}{AB} = \cot 20°$,

অর্থাৎ $QB = AB \cot 20°$,

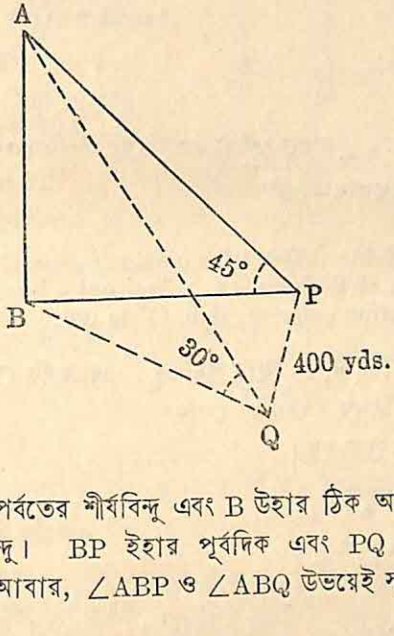
এবং $\frac{PC}{AC} = \tan PAC = \tan 60°$.

$\therefore \quad PC = AC \tan 60° = QB \tan 60° = AB \cot 20° \tan 60°$

অতএব, PQ-র উচ্চতা $= PC + CQ = AB \cot 20^\circ \tan 60^\circ + AB$

$$= AB(\cot 20^\circ \tan 60^\circ + 1)$$
$$= 50(2{\cdot}747 \times \sqrt{3} + 1)$$
$$= 287{\cdot}8 \cdots \text{ ফুট} = 288 \text{ ফুট (প্রায়)।}$$

Ex. 4. *The elevation of a hill from a place P due East of it is 45°, and at a place Q due south of P, the elevation is 30°. If the distance PQ be 400 yds., find the height of the hill.*



মনে করি, A পর্বতের শীর্ষবিন্দু এবং B উহার ঠিক অধঃস্থিত (vertically below) ভূমিস্থ বিন্দু। BP ইহার পূর্বদিক এবং PQ দক্ষিণ দিক হইলে $\angle BPQ = 90°$. আবার, $\angle ABP$ ও $\angle ABQ$ উভয়েই সমকোণ।

এক্ষণে, $\dfrac{BQ}{AB} = \cot AQB = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$.

এবং $\dfrac{BP}{AB} = \cot APB = \cot 45^\circ = 1$.

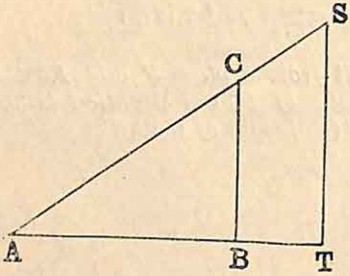
অতএব, $BQ = AB\sqrt{3}$, $BP = AB$.

এবং $PQ^2 = BQ^2 - BP^2 = 3AB^2 - AB^2 = 2.AB^2$

$$AB = \frac{PQ}{\sqrt{2}} = \frac{400}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{2} = 283 \text{ গজ (প্রায়)।}$$

Ex. 5. *Find the angle of elevation of the sun when the shadow of a pole 60 feet high, is 20 $\sqrt{3}$ yards long.*

মনে করি, S সূর্য, BC প্রদত্ত দণ্ড, এবং AB ইহার ছায়া।



$\therefore$ BC = 60 ফুট

AB = 20 $\sqrt{3}$ গজ = 60 $\sqrt{3}$ ফুট।

অতএব, ABC সমকোণী ত্রিভুজ হইতে, আমরা লিখিতে পারি

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{60}{60\sqrt{3}}$$

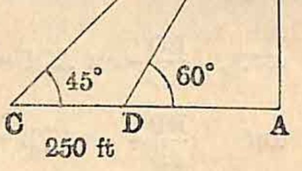
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°.$$

কিন্তু, ∠A অর্থাৎ ∠TAS সূর্য S এর নির্ণেয় উন্নতি কোণ।

অতএব, নির্ণেয় কোণ = 30°.

Ex. 6. *Find the height of a chimney when it is found that on walking towards it 250 feet, in a horizontal line through its base, the angular elevation changes from 45° to 60°.*

মনে করি, AB চিম্‌নি, B ইহার শীর্ষবিন্দু ; এবং দর্শক C হইতে D বিন্দুতে গমনের ফলে B-বিন্দুর উন্নতি কোণ যথাক্রমে 45° হইতে 60° হয়।



$\therefore$ CD = 250 ফুট।

এখন, $\tan 45° = \frac{AB}{AC}$.

$\therefore$ AB = AC.

$\tan 60° = \frac{AB}{AD}$.

$\therefore$ $AD = \frac{AB}{\tan 60°} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$.

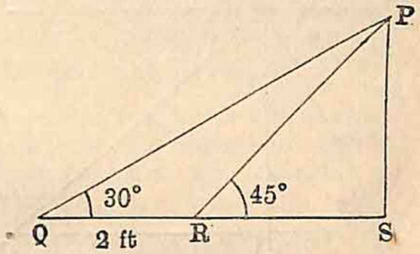
$$250 = CD = AC - AD = AB - \frac{AB}{\sqrt{3}} = AB \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $AB = \frac{250\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{250\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 125(3+\sqrt{3})$ ফুট।

Ex. 7. *PQR is a triangle and S is the projection of P on QR produced. If $\angle PQS = 30^\circ$, $\angle PRS = 45^\circ$, and $QR = 2$ ft., find RS.* [*C. U. 1951*]

যেহেতু, S বিন্দু QR-এর বর্ধিতাংশের উপর P-এর লম্ববিন্দু,

$\therefore \quad \angle PSR = 90^\circ$.



এখন, PQS সমকোণী ত্রিভুজ হইতে, $\because \quad \angle PQS = 30^\circ$,

$\therefore \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ = \dfrac{PS}{QS}$.

$\therefore \quad QS = PS\sqrt{3}$,

বা, $QR + RS = PS\sqrt{3}$

বা, $2 + RS = PS\sqrt{3} \qquad \cdots (1)$

আবার, PRS সমকোণী ত্রিভুজ হইতে, $\because \quad \angle PRS = 45^\circ$,

$\therefore \quad \tan 45^\circ = \dfrac{PS}{RS}. \qquad \therefore \quad PS = RS.$

সুতরাং, (1) হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$2 + RS = RS\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad RS = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1 \text{ ফুট।}$$

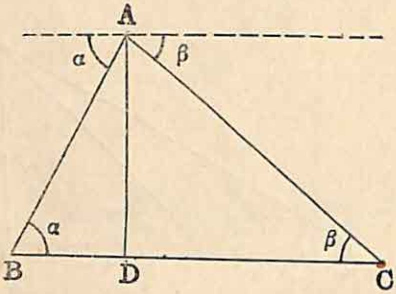
Ex. 8. *From an aeroplane vertically over a straight horizontal road, the angles of depression of two consecutive milestones on opposite sides of the aeroplane are observed to be α and β. Show that the height in miles of the aeroplane above the road is given by*

$$\frac{\tan\alpha \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}. \qquad [\textit{ C. U. 1952 }]$$

মনে করি, A এরোপ্লেন, B ও C দুইটি পরপর মাইল নিদর্শন-স্তম্ভ। প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\angle ABC = \alpha$ এবং $\angle ACB = \beta$. $\therefore$ BC = 1 মাইল। BC বাহুর উপর AD লম্ব টানিলে, AD = h হইবে এরোপ্লেনের নির্ণেয় উচ্চতা।

এখন, $\tan\alpha = \frac{AD}{BD}$. $\therefore\ BD = \frac{AD}{\tan\alpha}$;

আবার, $\tan\beta = \frac{AD}{CD}$. $\therefore\ CD = \frac{AD}{\tan\beta}$.



কিন্তু, $BD + CD = BC$

$= 1$ মাইল।

$\therefore\ 1$ মা. $= BD + CD$

$= \frac{AD}{\tan\alpha} + \frac{AD}{\tan\beta}$

$= \frac{AD(\tan\alpha + \tan\beta)}{\tan\alpha\tan\beta}$;

$\therefore\quad AD = h = \frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$ মাইল।

Examples IV

1. From the top of a tower by the seaside, 100 feet high, it was observed that the angle of depression of the bottom of a ship at anchor was 30°. Find the distance of the ship from the bottom of the tower.

2. Two straight roads, which cross one another, meet a river with straight course at angles 60° and 30° respectively. If it be 3 miles by the longer of the two roads, from the crossing to the river, how far is it by the shorter ? If there be a foot-path which goes the shortest way from the crossing to the river, what is the distance by it ?

3. Two poles are of equal height ; a person standing midway between the line joining their bases observes the elevation of the poles to be 30°. After walking 40 feet towards one of them, he observes that the same pole now subtends an angle of 60°. Find their height and the distance between them.

4. A straight palm tree 60 feet high, is broken by the wind but not completely separated, and its upper part meets the ground at an angle of 30°. Find the distance of the point where the top of the tree meets the ground, from the root, and also the height at which the tree is broken.

5. Two posts are 120 ft. apart, and the height of one is double that of the other. From the middle point of the line joining their feet, an observer finds the angular elevations of their tops to be complementary. Find the height of the shorter post.

6. The Bally bridge subtends an angle of 45° at a given point at the edge of the river ; 800 yds. higher up, it subtends an angle of 30°. The course of the river here is straight and perpendicular to the bridge. Find the length of the bridge.

7. The height of a house subtends a right angle at an opposite window, the top being 60° above a horizontal straight line through the window ; find the height of the house, taking the breadth of the street to be 30 feet.

8. From an aeroplane vertically over a straight road, the angles of depression of two consecutive milestones are observed to be 45° and 60° ; find the height of the aeroplane.

9. From a ship sailing due South-East at the rate of 5 miles an hour, a light-house is observed to be 30° North of East, and and after 4 hours, it is seen due North ; find the distance of the light-house from the final position of the ship.

10. The shadow of a tower standing on a level plane is found to be 40 feet longer when the sun's altitude is 45° than when it is 60°. Find the height of the tower.

11. From the lower window of a house the angular elevation of a church-steeple is found to be 45° and from a window 20 feet above, the elevation is 30°. How far is the church from the house ?

12. A light-house facing East sends out a fan-shaped beam of light extending from S. E. to N. E. An observer sailing due North, after meeting the light continues to see it for $10\sqrt{2}$ minutes. When leaving the fan of light, the ship is 10 miles from the light-house. Find the speed of the ship.

13. A pole 100 ft. high stands vertically at the centre of a horizontal equilateral triangle, each side of which subtends an angle of 60° at the top of the pole. Find the side of the triangle.

14. Two chimneys are of equal height. A person standing between them in the line joining their bases observes the elevation of the nearer one to be 60°. After walking 80 feet in a direction at right angles to the line joining their bases, he observes

the elevations of the two to be 45° and 30° respectively. Find the height and the distance between them.

15. At the foot of a mountain the elevation of its summit is 45°; after ascending 1 mile towards the mountain up an incline of 30°, the elevation changes to 60°. Find the height of the mountain.

16. From a station, two light-houses A and B are seen in directions North and 30° East of North respectively; if A were one-third as far off as it really is, it would appear due West of B. If the distance of B from the station be 10 miles, find the distance of B from A.

17. A person walking along a straight road observes a tall tree standing in front of a tower, both being on the road before him. The elevation of the top of the tower is 45°, and of the top of the tree 30°; on advancing 100 feet he finds the tower and the tree to have the same elevation 60°; supposing the height of the eye of the man to be 5 feet, find the height of the tower and of the tree.

18. A man on the top of a rock rising on a seashore, observes a boat coming towards it at an angle of depression 30°; 10 minutes later the angle of depression is 60°. The height of the rock being 4000 feet, find the speed of the boat in miles per hour.

19. A person walking along a straight level road observes the elevation of the top of a hill to be 60° when he is nearest the hill, and after walking 200 yards in a direction perpendicular to the direction of the hill from this point, observes the elevation to be 30°. Find the approximate height of the hill.

20. A square tower stands on a horizontal plane. From a point in this plane, only three of its upper corners are visible, and their angles of elevation are 45°, 60°, 45°. Find the ratio of the height of the tower to its breadth.

21. Two wheels, the sum of whose radii is 10 feet, are placed flatly on a table with their centres at a distance of 20 ft. An endless string, quite stretched, is partly wrapped round the wheels and crosses itself between them. Show that the length of the string is nearly $76{\cdot}5$ feet.

22. On a still day, from a station A an airship is observed due north at an elevation of 60°, while from a station B it is observed due east at an elevation of 45°. At this instant of observation,

a parachute message is dropped from the airship, and the observer at A has to walk a mile to reach the message. Find the distance between the two stations.

23. From the foot of a column the angle of elevation of the top of a tower is 45° and from the top of the column the angle of depression of the bottom of the tower is 30°. A man walks 10 ft. from the bottom of the column towards the tower and notices the angle of the elevation of its top to be 60°. Find the height of the column.

ANSWERS

1. $100\sqrt{3}$ ft. **2.** 2·89... miles; $2\frac{1}{2}$ miles. **3.** $20\sqrt{3}$ ft.; 120 ft.
4. $20\sqrt{3}$ ft.; 20 ft. **5.** $30\sqrt{2}$ ft. **6.** $400(\sqrt{3}+1)$ yds.
7. $40\sqrt{3}$ ft. **8.** $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{3})$ miles. **9.** 22·3 miles nearly.
10. 94·64 ft. nearly. **11.** 47·32 ft. nearly. **12.** 60 miles per hour.
13. $50\sqrt{6}$ ft. **14.** $40\sqrt{6}$ ft.; $40\sqrt{2}(\sqrt{7}+1)$ ft.
15. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ miles. **16.** $5\sqrt{13}$ miles.
17. 241·6... ft.; 91·6... ft. **18.** 5·25... miles per hour.
19. 367·38 ft. **20.** $\frac{1}{4}\sqrt{6}(\sqrt{5}+1)$.
22. 2 miles. **23.** 13·66 ft.

পঞ্চম অধ্যায়

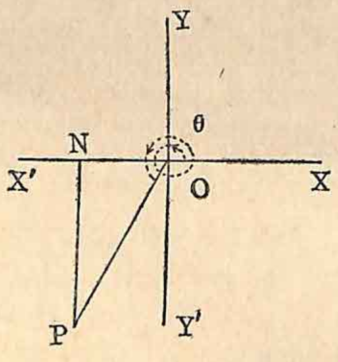
প্রদত্ত কোণ θ-র সহিত সংশ্লিষ্ট কোণসমূহের কোণানুপাত

(Trigonometrical ratios of angles associated with a given angle θ)

5·1. যে-কোন কোণের কোণানুপাত (Trigonometrical ratios of any angle).

আমরা দ্বিতীয় অধ্যায়ে সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের সংজ্ঞা দিয়াছি। এক্ষণে, θ যে-কোন কোণ (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হইলে ইহার কোণানুপাতের সংজ্ঞা নির্ধারণ করিতে হইবে।

একটি সমতলক্ষেত্রকে XOX′ এবং YOY′ এই দুইটি লম্ব-দ্বারা চারিটি পাদে বিভক্ত করা যায়। মনে করি, OP সরলরেখা OX হইতে আবর্তন আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে অথবা ঘড়ির কাঁটার দিকে θ-কোণ উৎপন্ন করিল। এখন θ-র মান যাহাই হউক না কেন, OP সরলরেখা উপরোক্ত চারিটি পাদের যে-কোন একটিতে অবস্থান করিবে। OP সরলরেখার উপর যে-কোন একটি বিন্দু P লইয়া, P হইতে OX-এর উপর কিম্বা ইহার বর্ধিতাংশ OX′-এর উপর PN লম্ব টানা হইল। সুতরাং, OPN একটি সমকোণী ত্রিভুজ; ইহার বাহুগুলির অনুপাতের দ্বারা θ-কোণের কোণানুপাতের সংজ্ঞা নির্দিষ্ট হইবে।



$$\sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{\text{সংলগ্ন বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\tan\theta = \frac{PN}{ON} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সংলগ্ন বাহু}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PN} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}$$

$$\sec\theta = \frac{OP}{ON} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সংলগ্ন বাহু}}$$

$$\cot\theta = \frac{ON}{PN} = \frac{\text{সংলগ্ন বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$$

সূক্ষ্মকোণের অনুরূপভাবে এখানেও $\text{vers}\ \theta = 1 - \cos\theta$

$\text{covers}\ \theta = 1 - \sin\theta.$

5·2. লেখ-অঙ্কনের (graphs) রীতি-অনুযায়ী OX এবং OY-এর দিকে দূরত্ব মাপিলে তাহাকে ধনাত্মক এবং OX′ ও OY′-এর দিকে দূরত্ব মাপিলে তাহা ঋণাত্মক বলিয়া গণ্য করা হয়, কিন্তু OP সরলরেখা যে-কোন পাদেই অবস্থান করুক না কেন, এইদিকে যে দূরত্ব মাপা হয়, তাহাকে সর্বদা ধনাত্মক বলিয়া গণ্য করা হয়।

এই নিয়মানুযায়ী, OP সরলরেখা প্রথম পাদে অবস্থান করিলে, PN, ON এবং OP,—সকলেই ধনাত্মক হইবে। সুতরাং XOP কোণের কোণানুপাত-গুলি সকলেই ধনাত্মক হইবে। কিন্তু OP সরলরেখা দ্বিতীয় পাদে অবস্থান করিলে, ON ঋণাত্মক এবং PN, OP ধনাত্মক। সেইজন্য, XOP কোণের কোণানুপাতগুলির মধ্যে কেবলমাত্র সাইন এবং কোসেক ধনাত্মক এবং অন্য সকলেই ঋণাত্মক। অনুরূপভাবে, ইহা প্রমাণ করা যায় যে, OP তৃতীয় পাদে অবস্থান করিলে কেবলমাত্র ট্যান এবং কট—উভয়েই ধনাত্মক এবং বাকী সকলেই ঋণাত্মক। আবার, OP চতুর্থ পাদে অবস্থান করিলে কেবলমাত্র কস ও সেক ধনাত্মক এবং অন্যগুলি ঋণাত্মক হইবে।

উপরোক্ত ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের চিহ্ন স্মরণ রাখিতে নিম্নলিখিত আলেখ্যটি খুবই কার্যকরী। এই নিয়মটিকে "সমস্ত, সাইন, ট্যান, কস"—সূত্র

বলিয়া আখ্যা দেওয়া হয়। OP-র অবস্থান-অনুযায়ী কোণানুপাতগুলির চিহ্ন এইরূপে দেওয়া যাইতে পারে ঃ—

সাইন (ধনাত্মক)	সমস্ত (ধনাত্মক)
ট্যান (ধনাত্মক)	কস (ধনাত্মক)

দ্রষ্টব্য 1. ইহা লক্ষ্য করা যায় যে, সাইন, কোসাইন এবং ট্যানজেণ্ট ধনাত্মক হইলে কোসেকাণ্ট, সেকাণ্ট এবং কোট্যানজেণ্ট ধনাত্মক হইবে [যেহেতু সংজ্ঞানুসারে $\sin\theta \,.\, \operatorname{cosec}\theta = \cos\theta \,.\, \sec\theta = \tan\theta \,.\, \cot\theta = 1$] ; অতএব, প্রথম তিনটি কোণানুপাতের মান ও চিহ্ন দেওয়া থাকিলে শেষ তিনটি কোণানুপাতের মান ও চিহ্ন অনায়াসেই পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য 2. ইহা আরও লক্ষ্য করা যায় যে, সূক্ষ্মকোণের অনুরূপ এখানেও ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতগুলি OPN ত্রিভুজের আয়তনের উপর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ, OP বাহুর উপর P যে-কোন বিন্দু লইয়া θ-কোণের কোণানুপাতের সংজ্ঞা দেওয়া হউক না কেন, অনুরূপ কোণানুপাতের মান ও চিহ্ন সর্বদা সমান থাকিবে। [দ্বিতীয় অধ্যায়ের 2·2 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য।]

উপরন্ত, সূক্ষ্মকোণের ন্যায় এখানেও কোণানুপাতগুলির মধ্যে অনুরূপ পারস্পরিক সম্বন্ধ বিদ্যমান। অর্থাৎ, θ-কোণের মান যাহাই হউক না কেন,

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

আবার,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

[এই অভেদাবলীর প্রমাণের জন্য দ্বিতীয় অধ্যায়ের 2·3 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য।]

5·3. θ-কোণের কোণানুপাতের সাহায্যে $(-\theta)$ কোণের কোণানুপাতগুলির প্রকাশ (Ratios of the angle $(-\theta)$ in terms of those of θ, θ having any magnitude).

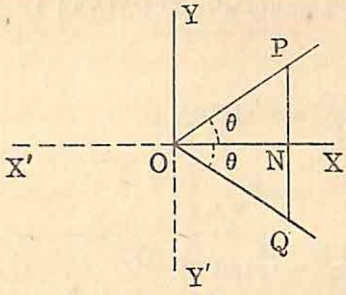


Fig. (i)

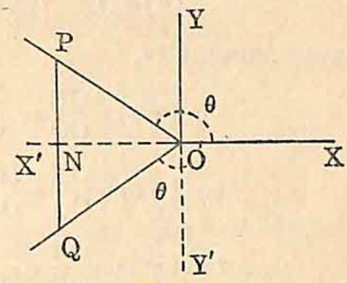


Fig. (ii)

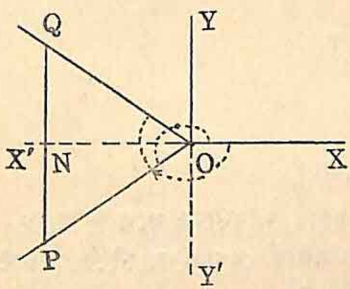


Fig. (iii)

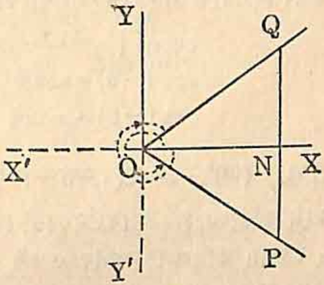


Fig. (iv)

মনে করি, $\angle XOP = \theta$, এবং আবর্তনকারী রেখার ঘড়ির কাঁটার দিকে আবর্তনের ফলে $\angle XOQ$ উৎপন্ন হইয়াছে এবং $\angle XOQ = -\theta$. OP-এর উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দু P হইতে OX-এর উপর PN লম্ব টানিলাম [উপরের চিত্র (ii) এবং (iii) এর ক্ষেত্রে OX'-এর উপর PN লম্ব টানিলাম]। PN-কে বর্ধিত করিলে ইহা OQ-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

এক্ষণে, $\angle XOP$ (ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী পরিমাপের ফলে) এবং $\angle XOQ$ (ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে পরিমাপের ফলে) পরস্পর সমান; অতএব, $\angle PON = \angle QON$, [চিহ্নের কথা বাদ দিয়া শুধু মাপের ক্ষেত্রে কোণ দুইটি সমান ; কিন্তু প্রকৃতপক্ষে একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক]। সুতরাং, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ PON এবং QON সর্বসম। অতএব, অনুরূপ বাহুগুলি

পরস্পর সমান। সুতরাং, প্রচলিত প্রথানুযায়ী বাহুগুলির চিহ্ন গণ্য করিয়া সমস্ত চিত্রেই দেখা যায় যে,

$$QN = -PN.$$
$$OQ = OP \quad (\text{উভয়কেই ধনাত্মক গণ্য করা হয়।})$$

অতএব, সংজ্ঞানুসারে,

$$\sin(-\theta) = \frac{QN}{OQ} = \frac{-PN}{OP} = -\sin\theta.$$

$$\cos(-\theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{-PN}{ON} = -\tan\theta$$

এবং বিপরীত অনুপাত-অনুসারে,

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$
$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta.$$

5·4. $(90° - \theta)$-র কোণানুপাত।

মনে করি, একটি আবর্তনকারী রেখা ইহার আবর্তনের ফলে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল। অপর একটি আবর্তনকারী রেখা OX হইতে আবর্তন আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিবার ফলে $\angle XOY = 90°$ কোণ উৎপন্ন করিবার পর পুনরায় বিপরীত দিকে ঘুরিয়া $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিল (শেষোক্ত আবর্তন ঘড়ির কাঁটার আবর্তনের দিকে হইবে); অতএব, উৎপন্ন কোণ $XOQ = 90° - \theta$.

OP এবং OQ সরলরেখার উপর যথাক্রমে P ও Q বিন্দু দুইটি লওয়া হইল যাহাতে $OP = OQ$ হয়। P এবং Q হইতে OX-এর উপর PN ও QM লম্ব টানা হইল।

(i) এবং (iii)-নং চিত্রানুযায়ী OP যদি প্রথম বা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হয়, তাহা হইলে, OQ-ও সেই পাদে অবস্থিত হইবে। কিন্তু (ii)-নং চিত্রানুযায়ী OP দ্বিতীয় পাদে অবস্থান করিলে OQ চতুর্থ পাদে অবস্থান করিবে এবং (iv)-নং চিত্রানুযায়ী OP চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইলে OQ দ্বিতীয় পাদে অবস্থান করিবে। এক্ষণে, $\angle XOP$ এবং $\angle YOQ$ কোণদ্বয়ের পরিমাপ সমান বলিয়া $\angle PON$

$=\angle OQM$ এবং $OP = OQ$. অতএব সমকোণী ত্রিভুজ PON এবং QOM সর্বসম। সুতরাং, অনুরূপ বাহুর পরিমাপ সমান। প্রচলিত প্রথানুযায়ী বাহুগুলির চিহ্নগুলি স্মরণ রাখিলে সমস্ত চিত্র হইতেই পাওয়া যায় যে,

$$QM = ON,\ OM = PN,\ OQ = OP.$$

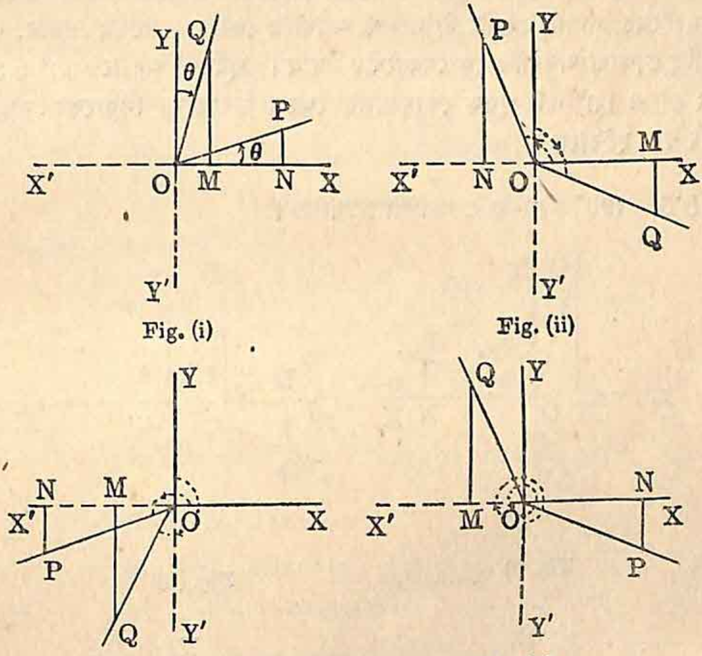


Fig. (i) Fig. (ii) Fig. (iii) Fig. (iv)

অতএব, সংজ্ঞানুসারে,

$$\sin(90^\circ-\theta)=\sin\angle XOQ=\frac{QM}{OQ}=\frac{ON}{OP}=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\frac{OM}{OQ}=\frac{PN}{OP}=\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{QM}{OM}=\frac{ON}{PN}=\cot\theta.$$

বিপরীত রাশিগুলি হইতে আমরা পাই,

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta,\quad \sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta.$$

পর্যবেক্ষণ : $(90^\circ-\theta)$ কোণ θ-কোণের পূরক বলিয়া আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হই যে, দুইটি পূরক কোণের যে-কোন একটির সাইন অপরটির কোসাইনের সমান, একটির ট্যানজেণ্ট অপরটির কোট্যানজেণ্টের সমান, এবং একটির সেকাণ্ট অপরটির কোসেকাণ্টের সমান। পূর্ববর্তী অধ্যায়ে 60° ও 30°, এবং 0° ও 90° এই পূরক কোণগুলির ক্ষেত্রে উপরোক্ত সিদ্ধান্তের সত্যতা নির্ণয় করা হইয়াছে।

5·5. $(90^\circ+\theta)$-র কোণানুপাত।

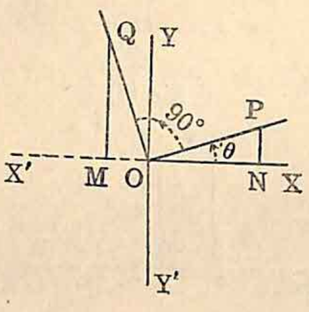


Fig. (i)

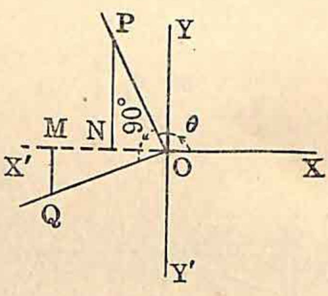


Fig. (ii)

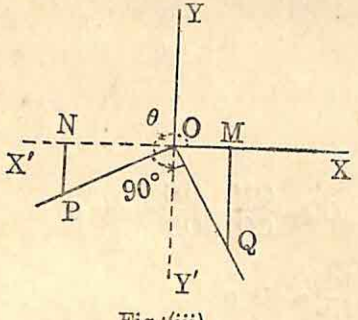


Fig. (iii)

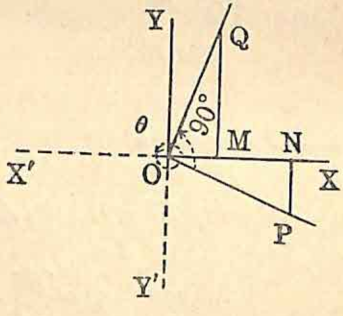


Fig. (iv)

মনে করি, আবর্তনকারী রেখা OX হইতে আবর্তন আরম্ভ করিয়া

$\angle XOP = \theta$ উৎপন্ন করিয়াছে। অতঃপর, আরও কিছুক্ষণ আবর্তন করিবার পর $\angle POQ = 90^\circ$ উৎপন্ন করিল ; অতএব, $\angle XOQ = 90^\circ + \theta$.

OP এবং OQ হইতে OP = OQ কাটিয়া লওয়া হইল এবং OX-এর উপর (প্রয়োজন হইলে OX-এর বর্ধিতাংশের উপর) P ও Q হইতে যথাক্রমে PN ও QM লম্ব টানা হইল।

OP-র উপর OQ লম্ব বলিয়া $\angle PON = \angle QOM$ কোণের পূরক $= \angle OQM$. (চিহ্ন গণ্য না করিয়া কেবল মানের দিক হইতে সমান।) পুনরায় OP = OQ. অতএব, OPN এবং OQM সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং বাহুসমূহের চিহ্নগুলি গণ্য করিলে সমস্ত চিত্রেই দেখা যায় যে,

$$QM = ON,\ OM = -PN,\ OQ = OP.$$

অতএব, সংজ্ঞানুসারে,

$$\mathbf{\sin (90^\circ + \theta)} = \sin \angle XOQ = \frac{QM}{OQ} = \frac{ON}{OP} = \mathbf{\cos \theta}.$$

$$\mathbf{\cos (90^\circ + \theta)} = \frac{OM}{OQ} = \frac{-PN}{OP} = \mathbf{-\sin \theta}.$$

$$\mathbf{\tan (90^\circ + \theta)} = \frac{QM}{OM} = \frac{ON}{-PN} = \mathbf{-\cot \theta}.$$

এবং বিপরীত রাশিগুলি হইতে,

$$\operatorname{cosec} (90^\circ + \theta) = \sec \theta$$
$$\sec (90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$$
$$\cot (90^\circ + \theta) = -\tan \theta.$$

5·6. $(180^\circ - \theta)$-র কোণানুপাত।

মনে করি, আবর্তনকারী রেখা $\angle XOP = \theta$ কোণটি উৎপন্ন করিয়াছে ; এবং অপর একটি রেখা OX হইতে আবর্তন আরম্ভ করিয়া OX′ পর্যন্ত আসিয়া 180° কোণ উৎপন্ন করিল এবং পুনরায় বিপরীত দিকে আবর্তনের ফলে $\angle X'OQ = \theta$ উৎপন্ন করিল। সুতরাং, $\angle XOQ = 180^\circ - \theta$.

এখানে OP প্রথম পাদে ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত এইরূপ দুইটি চিত্র দেওয়া হইয়াছে। শিক্ষার্থীরা সহজেই অপর দুইটি চিত্র অঙ্কিত করিয়া লইতে সক্ষম হইবে বলিয়া আশা করা যায়।

এখন, OP = OQ কাটিয়া লইয়া P এবং Q হইতে OX বা OX-এর বর্ধিতাংশের উপর যথাক্রমে PN এবং QM লম্ব টানা হইল ; সুতরাং, ∠PON = ∠QOM. (কেবল পরিমাপের দিক্ হইতে সমান।) এবং OP = OQ ;

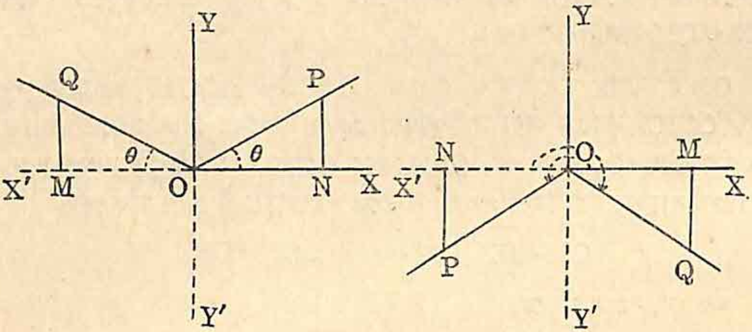


Fig. (i) Fig. (ii)

অতএব, △PON এবং △QOM এই সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং, উহাদের অনুরূপ বাহুর দৈর্ঘ্য সমান। বাহুগুলির যথোপযুক্ত চিহ্ন গণ্য করিলে সমস্ত চিত্রেই দেখা যায় যে,

$$QM = PN,\ OM = -ON,\ OQ = OP.$$

অতএব, θ-র মান যাহাই হউক না কেন,

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin XOQ = \frac{QM}{OQ} = \frac{PN}{OP} = \sin\theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{OM}{OQ} = \frac{-ON}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{QM}{OM} = \frac{PN}{-ON} = -\tan\theta.$$

সুতরাং, ইহাদের বিপরীত রাশি গণ্য করিলে,

$$\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$$

$$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta.$$

দ্রষ্টব্য। উপরোক্ত প্রথম দুইটি সূত্র নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :— সম্পূরক কোণদ্বয়ের সাইন সমান হইবে এবং কোসাইনের পরিমাপ সমান হইবে, কিন্তু চিহ্ন বিপরীত হইবে।

5·7. $(180^\circ+\theta)$-র কোণানুপাত।

আবর্তনকারী রেখা OX হইতে আরম্ভ করিয়া $\angle XOP=\theta$ উৎপন্ন করিবার পর পুনরায় একই দিকে আবর্তনের ফলে $\angle POQ=180^\circ$ উৎপন্ন করিল ; অতএব, $\angle XOQ=180^\circ+\theta$ এবং OP ও OQ একই সরল রেখায় অবস্থিত। OP = OQ কাটিয়া লইয়া, P এবং Q হইতে XOX′ রেখার উপর যথাক্রমে PN ও QM লম্ব টানা হইল।

OP প্রথম ও চতুর্থ পাদে এইরূপ দুইটি চিত্র দেওয়া হইয়াছে ; অনুরূপভাবে অপর দুইটি চিত্র অঙ্কিত করা যাইবে।

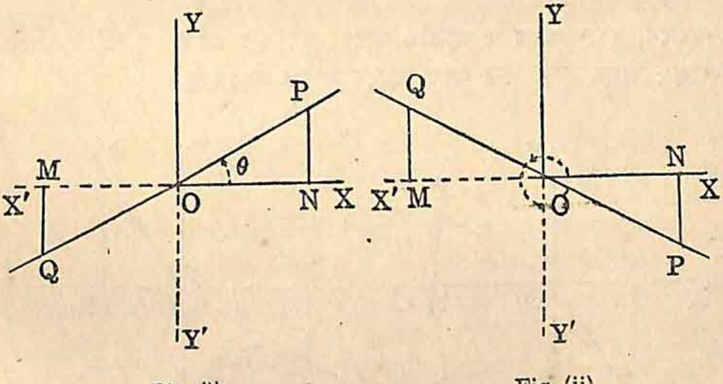


Fig. (i) Fig. (ii)

এক্ষণে, POQ একটি সরল রেখা বলিয়া $\angle PON=\angle QOM$ (পরিমাপে) এবং OP = OQ ; অতএব, $\triangle PON$ ও $\triangle QOM$ এই সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং, অনুরূপ বাহুর পরিমাপ সমান। সর্বক্ষেত্রে উপযুক্ত চিহ্ন গণ্য করিলে

$$QM=-PN,\ OM=-ON,\ OQ=OP.$$

অতএব, θ-র সকল পরিমাপের ক্ষেত্রেই

$$\sin(180^\circ+\theta)=\sin XOQ=\frac{QM}{OQ}=\frac{-PN}{OP}=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=\frac{OM}{OQ}=\frac{-ON}{OP}=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{QM}{OM}=\frac{-PN}{-ON}=\frac{PN}{ON}=\tan\theta.$$

অতএব, $\operatorname{cosec}(180^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta$

$\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta.$

5·8. $(270^\circ-\theta)$-র কোণানুপাত।

মনে করি যে আবর্তনকারী রেখার আবর্তনের ফলে $\angle XOP=\theta$ কোণ উৎপন্ন হইয়াছে। অপর একটি রেখার আবর্তনের ফলে $\angle XOY'=270^\circ$ উৎপন্ন হওয়ার পর রেখাটি ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে পুনরায় আবর্তন করিয়া $\angle Y'OQ=\theta$ উৎপন্ন করিল ; অতএব, $\angle XOQ=270^\circ-\theta$.

এখানে, OP প্রথম ও তৃতীয় পাদে অবস্থিত এইরূপ তুইটি চিত্র দেওয়া হইয়াছে ; অপর তুইটি চিত্র অনুরূপভাবে অঙ্কিত করা যায়।

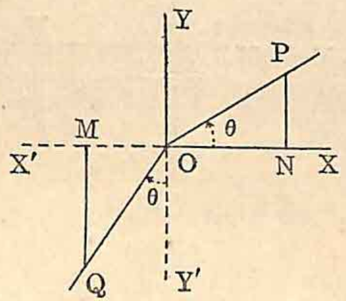


Fig. (i)

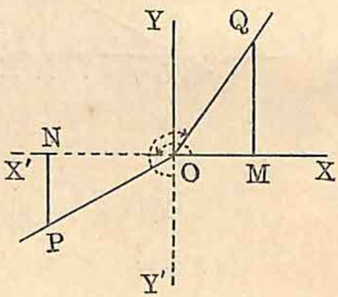


Fig. (ii)

$OP=OQ$ কাটিয়া লওয়া হইল এবং P ও Q হইতে XOX' রেখার উপর PN ও QM লম্ব টানা হইল। যেহেতু $\angle XOP=\angle Y'OQ$, ইহা সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, $\angle PON=\angle OQM$ (পরিমাপে) ; এবং $OP=OQ$; অতএব, PON ও QOM এই সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। উপযুক্ত চিহ্ন গণ্য করিলে সমস্ত চিত্রেই দেখা যায় যে,

$$QM=-ON,\ OM=-PN,\ OQ=OP.$$

অতএব, θ-র মান যাহাই হউক না কেন,

$$\sin(270^\circ-\theta)=\sin\angle XOQ=\frac{QM}{OQ}=\frac{-ON}{OP}=-\cos\theta.$$

$$\cos(270^\circ-\theta)=\frac{OM}{OQ}=\frac{-PN}{OP}=-\sin\theta.$$

$$\tan(270^\circ-\theta)=\frac{QM}{OM}=\frac{-ON}{-PN}=\frac{ON}{PN}=\cot\theta.$$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(270^\circ-\theta)=-\sec\theta$, $\sec(270^\circ-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$
$\cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta.$

5·9. (270°+θ)-র কোণানুপাত।

(270°+θ)-র কোণানুপাত-নির্ণয়ের সময় আমরা পূর্বোক্ত জ্যামিতিক নিয়মানুসারে অগ্রসর হইতে পারি। নিম্নোক্ত বিকল্প নিয়মেও এই অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যায় :—

$$\sin(270^\circ+\theta)=\sin(180^\circ+\overline{90^\circ+\theta})=-\sin(90^\circ+\theta)$$ [5·5 অনু : হইতে]

$$=-\cos\theta$$ [5·3 অনু : হইতে]

$$\cos(270^\circ+\theta)=\cos(180^\circ+90^\circ+\theta)=-\cos(90^\circ+\theta)$$
$$=-(-\sin\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(270^\circ+\theta)=\tan(180^\circ+90^\circ+\theta)=\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta.$$

অতএব, $\operatorname{cosec}(270^\circ+\theta)=-\sec\theta$
$\sec(270^\circ+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$
$\cot(270^\circ+\theta)=-\tan\theta.$

দ্রষ্টব্য। $180^\circ-\theta$, $180^\circ+\theta$, $270^\circ-\theta$, এই সকল কোণের কোণানুপাতগুলিও $90^\circ\pm\theta$-র কোণানুপাতের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

5·10. (360°−θ), (360°+θ) এবং (n.360°±θ)-র কোণানুপাত।

প্রথম অধ্যায়ের দ্বিতীয় অনুচ্ছেদে দেখানো হইয়াছে যে, যে সকল কোণের অন্তর 360°-র গুণিতক, অর্থাৎ আবর্তনকারী রেখার সঠিক-সংখ্যক পূর্ণ আবর্তনের সমান, সেই সমস্ত কোণের ক্ষেত্রে যদি প্রথম অবস্থান এক হয়, তাহা

হইলে শেষ অবস্থানও একই হইবে। অতএব, এই কোণদ্বয়ের কোণানুপাতের পরিমাপ সমান ও চিহ্ন একই হইবে।

অতএব, $(360° - \theta)$-র কোণানুপাত $(-\theta)$-র অনুরূপ কোণানুপাতের সমান হইবে।

সুতরাং, $\sin(360° - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(360° - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(360° - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$

$(360° + \theta)$, এবং n একটি অখণ্ড সংখ্যা হইলে $n \times 360° \pm \theta$ র কোণানুপাত যথাক্রমে θ এবং $\pm\theta$-র অনুরূপ কোণানুপাতের সমান হইবে।

অতএব, যে-কোন কোণের কোণানুপাত নির্ণয়কালে 360° (অর্থাৎ 2π)-র যে কোন গুণিতক যোগ অথবা বিয়োগ করা যায়।

5·11. উপরোক্ত নিয়মগুলি সহজে মনে রাখিবার জন্য নিম্নলিখিত কয়েকটি সহজ নিয়ম উল্লেখ করা যায়ঃ—

θ যদি 90° ডিগ্রির যুগ্ম গুণিতকের সহিত '+' অথবা '−' চিহ্নদ্বারা সংযুক্ত থাকে (যেমন, $180° - \theta$, $180° + \theta$, $360° - \theta$, $360° + \theta$ ইত্যাদি) তাহা হইলে কোণানুপাতের রূপ অপরিবর্তিত থাকিবে (অর্থাৎ সাইন সাইনই থাকিবে, কোসাইন কোসাইনই থাকিবে, ইত্যাদি); চিহ্ন কি হইবে তাহা নির্ণয় করিতে হইলে θ-কে সূক্ষ্মকোণরূপে গণ্য করিয়া সংশ্লিষ্ট কোণ কোন্ পাদে থাকিবে তাহা লক্ষ্য করিতে হইবে অতঃপর "সমস্ত, সাইন, ট্যান, কস" এই সূত্রের সাহায্যে কোণানুপাতের চিহ্নগুলি নির্ণীত হইবে।

θ যদি 90° ডিগ্রীর অযুগ্ম গুণিতকের সহিত '+' অথবা '−' চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে (যেমন, $90° - \theta$, $90° + \theta$, $270° - \theta$, $270° + \theta$, ইত্যাদি) তাহা হইলে কোণানুপাতগুলি পরিবর্তিত হইবে। (অর্থাৎ সাইন পরিবর্তিত হয় কোসাইনে, কোসাইন পরিবর্তিত হয় সাইনে, ইত্যাদি)। অধিকন্তু, θ-কে সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া OQ সরল রেখার অবস্থান হইতে "সমস্ত, সাইন, ট্যান, কস্" এই সূত্র-দ্বারা কোণানুপাতগুলির চিহ্ন নির্ণয় করিতে হইবে।

উদাহরণ স্বরূপঃ $\tan(270° - \theta)$ এবং $\sec(180° + \theta)$ সম্পর্কে উপরোক্ত নিয়ম প্রয়োগের ফল লক্ষ্য করা যাক।

$270° - \theta = 3 \times 90° - \theta$ (90°-র গুণিতক অযুগ্ম)

অতএব, অনুপাত পরিবর্তিত হইবে অর্থাৎ tan হইবে cot ; অধিকন্তু θ-কে সূক্ষ্মকোণরূপে কল্পনা করিলে (প্রকৃতপক্ষে θ-সূক্ষ্মকোণ কিনা এই প্রশ্ন অবান্তর), $(270° - \theta)$ তৃতীয় পাদের অন্তর্গত এবং সেক্ষেত্রে ট্যান ধনাত্মক।

সুতরাং, $\tan(270° - \theta) = +\cot\theta.$

$(180° + \theta)$-র ক্ষেত্রে θ $90°$-র যুগ্মগুণিতকের সহিত সংযুক্ত। অতএব, অনুপাতের রূপ পরিবর্তিত হইবে না, অর্থাৎ sec, sec-ই থাকিবে। অধিকন্তু, θ-কে সূক্ষ্মকোণরূপে গণ্য করিলে $180° + \theta$ তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে ; সুতরাং, (সমস্ত, সাইন, ট্যান, কস) সূত্র অনুসারে, sec ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, $\sec(180° + \theta) = -\sec\theta.$

বিঃ দ্রঃ। $(-\theta)$-কে $0 \times 360° - \theta$-রূপে লেখা যায় এবং উপরোক্ত নিয়ম প্রয়োগের সময় 0-কে যুগ্মসংখ্যারূপে গণ্য করা হয়।

যেহেতু, θ-কে সূক্ষ্মকোণ ধরিলে $-\theta$ চতুর্থ পাদের অন্তর্ভুক্ত এবং সেখানে কেবল কস ও সেক ধনাত্মক, এইক্ষেত্রে অনুপাতের রূপ অপরিবর্তিত থাকে বলিয়া, আমরা কোণানুপাতের নিম্নলিখিত রূপ পাই :

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$, ইত্যাদি।

5·12. প্রথম পাদ-বহির্ভূত বিশিষ্ট কোণ।

5·4 অনুচ্ছেদে θ-র মান যথাক্রমে $60°$, $45°$, $30°$ ও $0°$ বসাইলে আমরা নিম্নলিখিত কোণানুপাতের মান পাই :

$$\mathbf{\sin 120°} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \mathbf{\cos 120°} = -\cos 60° = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\sin 135° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{\sin 180°} = \sin 0° = 0; \quad \mathbf{\cos 180°} = -\cos 0° = -1.$$

অনুরূপভাবে, 5·7 এবং 5·8 অনুচ্ছেদে $\theta = 0$ বসাইলে,

$$\sin 270° = -\cos 0° = -1, \quad \cos 270° = \sin 0° = 0$$
$$\sin 360° = \sin 0° = 0, \quad \cos 360° = \cos 0° = 1.$$

উপরোক্ত মানগুলি হইতে আরও জানা যায় যে,

$\mathbf{\tan 180° = 0}$, $\tan 360° = 0$; কিন্তু $\tan 270°$-র মান অনির্দিষ্ট।

5·13. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Find the value of cot (– 1575°).*

$$\cot(-1575^\circ) = -\cot(1575^\circ) = -\cot(4\times 360^\circ + 135^\circ)$$
$$= -\cot 135^\circ = -\cot(180^\circ - 45^\circ)$$
$$= \cot 45^\circ = 1.$$

Ex. 2. *If* $\theta = \frac{17\pi}{3}$, *find the value of* $(\cot\theta - \tan\theta)$.

$\frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$ এবং 360° বা 2π-এর গুণিতক অগ্রাহ্য করিলে কোণানুপাত পরিবর্তিত হইবে না।

$$\therefore \quad \cot\frac{17\pi}{3} = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

এবং $\tan\frac{17\pi}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

$$\therefore \quad \cot\theta - \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ex. 3. *Prove that*

$$\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ)\sin(-330^\circ) = 1.$$

বাম পক্ষ $= \sin(360^\circ + 60^\circ)\cos(360^\circ + 30^\circ)$
$+ \cos(-360^\circ + 60^\circ)\sin(-360^\circ + 30^\circ)$

$$= \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Ex. 4. *Express* cot (– 1358°) *in terms of the ratio of a positive angle less than* 45°.

$$\cot(-1358^\circ) = \cot(-4\times 360^\circ + 82^\circ)$$
$$= \cot 82^\circ = \cot(90^\circ - 8^\circ) = \tan 8^\circ.$$

দ্রঃ। যে-কোন কোণের কোণানুপাতকে 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণের কোণানুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

Ex. 5. *Simplify* : $\dfrac{\cos(90^\circ+\theta)\sec(-\theta)\tan(180^\circ-\theta)}{\sec(360^\circ+\theta)\sin(180^\circ+\theta)\cot(90^\circ-\theta)}$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{-\sin\theta\sec\theta(-\tan\theta)}{\sec\theta(-\sin\theta)\tan\theta}=-1.$

Ex. 6. *Solve* : $\tan\theta=2\sin\theta$, *for* $0^\circ\leqslant\theta<360^\circ$.

$$\tan\theta=2\sin\theta$$

বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta,$

বা, $\sin\theta\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-2\right)=0.$

$\therefore\ \sin\theta=0$ অর্থাৎ, $\theta=0^\circ, 180^\circ.$

অথবা, $\dfrac{1}{\cos\theta}-2=0,\quad \cos\theta=\dfrac{1}{2}=\cos 60^\circ, \cos(360^\circ-60^\circ).$

$$\therefore\ \theta=60^\circ, 300^\circ.$$

$\therefore\ \theta=0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ.$

Ex. 7. *Reduce to the simplest form*

$$\frac{\sin(270^\circ+A)\cos(90^\circ-A)}{\sin(180^\circ-A)\cos(180^\circ-A)}.$$

$$\frac{\sin(270^\circ+A)\cos(90^\circ-A)}{\sin(180^\circ-A)\cos(180^\circ-A)}=\frac{(-\cos A)(\sin A)}{\sin A(-\cos A)}=1.$$

Ex. 8. *If A, B, C be the angles of a triangle, show that*

$$\sin(B+C)+\sin(C+A)+\sin(A+B)$$
$$=\sin A+\sin B+\sin C.$$

যেহেতু, ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°, অতএব,

$$A+B+C=180^\circ$$

$\therefore\ B+C=180^\circ-A.\quad \therefore\ \sin(B+C)=\sin(180^\circ-A)=\sin A.$

$C+A=180^\circ-B.\quad \sin(C+A)=\sin(180^\circ-B)=\sin B.$

$A+B=180^\circ-C.\quad \sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C.$

সুতরাং, যোগ করিলে,

$$\sin(B+C)+\sin(C+A)+\sin(A+B)=\sin A+\sin B+\sin C.$$

Ex. 9. *Show that*

$$\cot(90^\circ - A)\cot A\cos(90^\circ - A)\tan(90^\circ - A) = \cos A.$$

বাম পক্ষ $= \cot(90^\circ - A)\cot A\cos(90^\circ - A)\tan(90^\circ - A)$

$= \cot A\cos(90^\circ - A)$ $\quad [\because \cot\theta\tan\theta = 1.]$

$= \dfrac{\cos A}{\sin A}\cdot\sin A = \cos A.$

Examples V

1. Write down the values of $\sin 150^\circ$, $\cot 840^\circ$, $\operatorname{cosec}(-660^\circ)$ and $\tan(-1125^\circ)$.

2. Find the values of $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right)$, $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{16\pi}{3}\right)$,

$\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$ and $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - \dfrac{19\pi}{3}\right)$.

3. Evaluate $\sin(-1230^\circ) - \cos\left\{(2n+1)\pi + \dfrac{\pi}{3}\right\}$, where n is a negative integer.

4. Find the value of $\sin\left\{n\pi + (-1)^n\dfrac{\pi}{3}\right\}$, where n is any integer.

5. Find all the values of

(i) $\tan\left\{\dfrac{n\pi}{2} + (-1)^n\dfrac{\pi}{4}\right\}$,

(ii) $\operatorname{cosec}\left\{\dfrac{n\pi}{2} + (-1)^n\dfrac{\pi}{6}\right\}$,

where n is any integer.

6. Show that $\cos\left(2m\pi \pm \dfrac{\pi}{3}\right)$ and $\tan\left(m\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$ have one value each for all integral values of m.

7. Prove that, n being any integer

(i) $\cos(n\pi + \alpha) = (-1)^n\cos\alpha$.

(ii) $\tan(n\pi - \alpha) = -\tan\alpha$.

8. Prove that

(i) $\cos\theta = -\cos(\theta - 180°)$,

(ii) $\tan\theta = -\cot(\theta - \frac{3}{2}\pi)$.

9. Prove that

(i) $\sin(780°)\cos(390°) - \sin(330°)\cos(-300°) = 1$.

(ii) $\cos 306° + \cos 234° + \cos 162° + \cos 18° = 0$.

(iii) $\dfrac{\sin 250° + \tan 290°}{\cot 200° + \cos 340°} = -1$.

10. Simplify

$$\frac{\sin^3(\pi+\theta)}{\cos^2(\frac{1}{2}\pi+\theta)} \cdot \frac{\tan(2\pi-\theta)}{\operatorname{cosec}^2\theta} \cdot \frac{\sec^2(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)}$$

and determine its value when $\theta = 225°$.

11. Prove that

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi+\theta)\cos(\pi-\theta)\cot(\tfrac{3}{2}\pi+\theta) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)\sin(\tfrac{3}{2}\pi-\theta)\cot(\tfrac{1}{2}\pi+\theta).$$

12. Evaluate

(i) $\sin^2\dfrac{\pi}{4} + \sin^2\dfrac{3\pi}{4} + \sin^2\dfrac{5\pi}{4} + \sin^2\dfrac{7\pi}{4}$.

(ii) $\cot\dfrac{\pi}{20}\cot\dfrac{3\pi}{20}\cot\dfrac{5\pi}{20}\cot\dfrac{7\pi}{20}\cot\dfrac{9\pi}{20}$.

(iii) $\sin x + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi + x) + \cdots\cdots$ to n terms.

13. If $\tan\theta = \frac{5}{12}$ and $\cos\theta$ is negative, find the value of

$$\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}.$$

14. An angle θ lies between 180° and 270°, and $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{7}{5}$. Find $\cot\theta$.

15. Express in terms of ratios of positive angles less than 45°;

(i) $\cot(-1054°)$.

(ii) $\sin(1145°)$.

(iii) $\sec(-1491°)$.

(iv) $\cos\dfrac{35\pi}{9}$.

16. Find the value of θ when,

(i) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ and θ lies between 270° and 360°.

(ii) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, and $450° < \theta < 540°$.

17. Solve for θ, giving all the possible values, when $0° < \theta < 360°$;

(i) $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$. [*C. U. 1936*]

(ii) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$.

(iii) $3(\sec^2\theta + \tan^2\theta) = 5$.

(iv) $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$.

(v) $1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta = 0$.

18. If A, B, C be angles of a triangle, show that

$$\sin(A+B) - \cos C = \cos(A+B) + \sin C.$$

19. If A, B, C be angles of a triangle, show that

$$\frac{\tan(B+C) + \tan(C+A) + \tan(A+B)}{\tan(\pi - A) + \tan(2\pi - B) + \tan(3\pi - C)} = 1.$$

20. If A, B, C, D be the angles of a quadrilateral, show that

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) + \cos\tfrac{1}{2}(B+D) = 0.$$

If the quadrilateral be cyclic then

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0.$$

ANSWERS

1. $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$; -1. **2.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $-\frac{2}{\sqrt{3}}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** 0.

4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** (i) 1. (ii) $\pm 2, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. **10.** $\tan^3\theta$; 1. **12.** (i) 2.

(ii) 1. (iii) $\sin x$ or 0 according as n is odd or even. **13.** $\frac{51}{26}$.

14. $\frac{\sqrt{40}}{3}$. **15.** (i) cot 26°. (ii) cos 25°. (iii) cosec 39°. (iv) $\cos\frac{\pi}{9}$.

16. (i) 300°. (ii) 480°. **17.** (i) 60°. (ii) 120°, 240°.

(iii) 30°, 150°, 210°, 330°. (iv) 30°, 150°. (v) 30°, 135°, 150°, 315°.

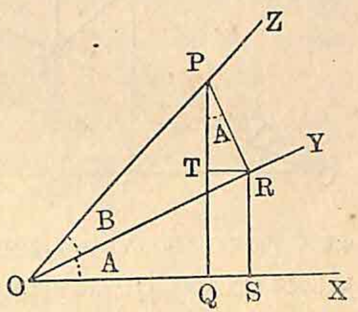
ষষ্ঠ অধ্যায়

যৌগিক কোণ (Compound Angles)

6·1. A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে এবং $(A+B) < 90°$ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

মনে করি, আবর্তনকারী রেখাটি OX হইতে আবর্তন আরম্ভ করিয়া $\angle XOY = A$ কোণ উৎপন্ন করিল এবং আরও কিছুদূর একই দিকে আবর্তনের ফলে $\angle YOZ = B$ কোণ উৎপন্ন করে। অতএব, $\angle XOZ = A + B$.



$(A+B)$ যৌগিক কোণের সীমা-রেখা OZ-এর উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P হইতে OX এবং OY-এর উপর যথাক্রমে PQ এবং PR লম্ব অঙ্কিত করা হইল ; R বিন্দু হইতে RS এবং RT যথাক্রমে OX এবং PQ-এর উপর লম্ব টানা হইল।

অতঃপর, POQ সমকোণী ত্রিভুজ হইতে আমরা জানি,

$$\sin(A+B) = \frac{PQ}{OP} = \frac{QT+TP}{OP} = \frac{RS+PT}{OP} = \frac{RS}{OP} + \frac{PT}{OP}$$
$$= \frac{RS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} + \frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$
$$= \sin A \,.\, \cos B + \cos TPR \,.\, \sin B.$$

কিন্তু, $\angle TPR = 90° - \angle TRP = \angle TRO =$ একান্তর $\angle ROS = A.$

সুতরাং, $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$

পুনরায়, $\cos(A+B) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OS-QS}{OP} = \frac{OS-TR}{OP} = \frac{OS}{OP} - \frac{TR}{OP}$

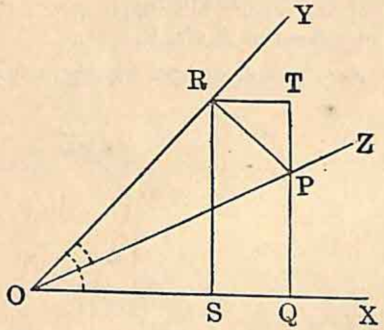
$$= \frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} - \frac{TR}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$
$$= \cos A \cos B - \sin TPR \,.\, \sin B$$
$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

6·2. A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে এবং $A > B$ হইলে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

মনে করি, আবর্তনকারী-রেখা OX হইতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতদিকে আবর্তন আরম্ভ করিয়া $\angle XOY = A$ কোণ উৎপন্ন করিবার পর OX-এর দিকে (অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে) পুনরাবর্তনের ফলে $\angle YOZ = B$ কোণ উৎপন্ন করে ; তাহা হইলে, $\angle XOZ = A - B$.



(A – B) যৌগিক কোণের সীমা রেখা OZ-এর উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P হইতে OX এবং OY-এর উপর যথাক্রমে PQ এবং PR লম্ব অঙ্কিত করা হইল ; R বিন্দু হইতে যথাক্রমে OX এবং QP-এর বর্ধিতাংশের উপর RS এবং RT লম্ব টানা হইল।

অতঃপর, সমকোণী ত্রিভুজ POQ হইতে, আমরা জানিতে পারি যে,

$$\sin(A-B) = \frac{PQ}{OP} = \frac{TQ - TP}{OP} = \frac{RS - PT}{OP} = \frac{RS}{OP} - \frac{PT}{OP}$$

$$= \frac{RS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} - \frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos TPR . \sin B$$

কিন্তু, $\angle TPR = 90° - \angle TRP = \angle YRT = \angle YOX = A.$

সুতরাং, $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$

পুনরায়, $\cos(A-B) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OS + SQ}{OP} = \frac{OS + RT}{OP} = \frac{OS}{OP} + \frac{RT}{OP}$

$$= \frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} + \frac{RT}{RP}\cdot\frac{RP}{OP}$$

$$= \cos A . \cos B + \sin TPR . \sin B$$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। উপরের জ্যামিতিক প্রমাণে A, B ও A + B কোণগুলিকে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং (A − B) কোণকে ধনাত্মক বলিয়া কল্পনা করা হইয়াছে। কিন্তু কোণগুলির উপর এই সমস্ত বিধিনিষেধ না থাকিলেও (চিত্রের কিছু পরিবর্তন করিয়া) একই পদ্ধতিতে উপরোক্ত বিষয় প্রমাণ করা যায়, অবশ্য প্রত্যেকটি রাশির উপযুক্ত চিহ্ন ধরিতে হইবে।* অতএব, **উপরোক্ত সূত্রগুলি সম্পূর্ণ ব্যাপক।**

দ্রষ্টব্য 1. দুই বা ততোধিক কোণের সমষ্টি বা অন্তরকে যৌগিক কোণ বলা হয় ; যেমন, A + B, A − B, A + B + C ইত্যাদি।

sin (A ± B), cos (A ± B)-এর বিস্তৃতিকে সাধারণতঃ সমষ্টিসূত্র (*Addition formulae*) বা সমষ্টি এবং অন্তর উপপাদ্য (*Addition and Subtraction Theorems*) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 2. সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে উপরোক্ত সূত্রগুলি সত্য বলিয়া ধরিয়া লইলে ইহা প্রমাণ করা যায় যে, কোণগুলির মাত্রা যাহাই হউক না কেন, উপরোক্ত সূত্রগুলি সর্বদাই প্রযোজ্য হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, sin (A + B) সম্পর্কে আলোচনা করা যাউক।

মনে করি, A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A + B < 90°$।

এক্ষণে, $A_1 = 90° + A$ এবং $B_1 = B$ হইলে,

$$\begin{aligned}\sin(A_1 + B_1) &= \sin\{(90° + A) + B\} = \sin\{90° + (A + B)\}\\ &= \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B\\ &= \sin(90° + A)\cos B + \cos(90° + A)\sin B\\ &= \sin A_1 \cos B_1 + \cos A_1 \sin B_1\end{aligned}$$

পুনরায়, $A_2 = -A$, $B_2 = B$ হইলে,

$$\begin{aligned}\sin(A_2 + B_2) &= \sin(-A + B) = -\sin(A - B)\\ &= -\sin A \cos B + \cos A \sin B\\ &= \sin(-A)\cos B + \cos(-A)\sin B\\ &= \sin A_2 \cos B_2 + \cos A_2 \sin B_2.\end{aligned}$$

অতএব, যে-কোন একটি কোণকে 90° দ্বারা বর্ধিত করিলে বা চিহ্ন পরিবর্তন করিলে উপরোক্ত সূত্রাবলী প্রযোজ্য হয়।

---

* পরিশিষ্টে দ্রষ্টব্য।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, কোণদ্বয়ের যে-কোন একটিকে 90° দ্বারা বর্ধিত করিলে বা চিহ্ন পরিবর্তন করিলে cos (A + B), sin (A − B) বা cos (A − B)-এর সূত্রগুলির রূপের কোনও পরিবর্তন হইবে না।

সুতরাং, প্রথমে A ও B-কে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ কল্পনা করিয়া যে-কোন কোণকে চিহ্ন পরিবর্তন করিবার বা 90° দ্বারা বর্ধিত করিবার পদ্ধতি অনুসরণ করিলে আমরা সহজেই প্রমাণ করিতে পারি যে, A এবং B-কোণের যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক মানের জন্যই উপরোক্ত সূত্রগুলি সর্বদা প্রযোজ্য হইবে।

অতএব, sin (A ± B) বা cos (A ± B)-এর বিস্তৃতি সকল ক্ষেত্রেই সমান প্রযোজ্য।

6·3. Ex. 1. *Find the values of sin 75°, cos 75°, sin 15° and cos 15°.*

$$\mathbf{\sin 75^\circ} = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{\cos 75^\circ} = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

এবং, $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$;

অতএব, পূর্বের ন্যায় sin 45°, cos 45° প্রভৃতির মান বসাইলে পূর্বের ন্যায় দেখানো যায় যে,

$$\mathbf{\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} \text{ এবং } \mathbf{\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}.$$

দ্রষ্টব্য : $\sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ.$
$\cos 15^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ.$

সুতরাং, cos 75° ও sin 75°-এর মান হইতে sin 15° ও cos 15°-এর মান নির্ণয় করা যায়।

Ex. 2. *Prove that*

(i) $\mathbf{\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B}$
$\mathbf{= \cos^2 B - \cos^2 A.}$

(ii) $\mathbf{\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B}$
$\mathbf{= \cos^2 B - \sin^2 A.}$

(i) এইস্থলে,

$$
\begin{aligned}
\text{বাম পক্ষ} &= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \\
&= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \\
&= \sin^2 A\,(1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B \\
&= \sin^2 A - \sin^2 B = (1 - \cos^2 A) - (1 - \cos^2 B) \\
&= \cos^2 B - \cos^2 A.
\end{aligned}
$$

(ii) এইস্থলে,

$$
\begin{aligned}
\text{বাম পক্ষ} &= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)(\cos A \cos B + \sin A \sin B) \\
&= \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B \\
&= \cos^2 A\,(1 - \sin^2 B) - (1 - \cos^2 A) \sin^2 B \\
&= \cos^2 A - \sin^2 B \\
&= (1 - \sin^2 A) - (1 - \cos^2 B) \\
&= \cos^2 B - \sin^2 A.
\end{aligned}
$$

বিঃ দ্রঃ। উদা. 1 এবং 2-এর ফলাফল বিশেষ প্রয়োজনীয় বলিয়া মনে রাখা প্রয়োজন।

6·4. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\mathbf{\tan (A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}}$.

(ii) $\mathbf{\tan (A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}}$

আমরা জানি,

$$\tan (A + B) = \frac{\sin (A + B)}{\cos (A + B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

এক্ষণে হর ও লব উভয়কে $\cos A \cos B$ দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\tan (A + B) = \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

পুনরায়,

$$\tan (A - B) = \frac{\sin (A - B)}{\cos (A - B)} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

পূর্বের ন্যায় হর ও লবকে cos A cos B দ্বারা ভাগ করিয়া দেখান যায় যে,

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

6·5. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$

$$\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

এখন হর ও লবকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিলে দেখা যাইবে যে,

$$\cot(A+B)=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

$$\cot(A-B)=\frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}.$$

পূর্বের ন্যায় লব এবং হরকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিয়া অনুরূপভাবে দেখান যায় যে,

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

6·6. Ex. 1. *Find the value of tan 75° and tan 15°.*

$$\textbf{tan 75}^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt3}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt3}}$$

$$=\frac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}=\frac{(\sqrt3+1)^2}{3-1}$$

$$=\frac{4+2\sqrt3}{2}=\mathbf{2+\sqrt3}.$$

$$\textbf{tan 15}^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt3}}{1+\dfrac{1}{\sqrt3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2} - \sqrt{3}.$$

Ex. 2. *Show that*

(i) $\tan(45° + A) = \dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

(ii) $\tan(45° - A) = \dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

(i) বাম পক্ষ $= \dfrac{\tan 45° + \tan A}{1 - \tan 45° \tan A} = \dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

(ii) ইহা (i)-এর অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়।

Ex. 3. *Show that*

$\cot 2A + \tan A = \operatorname{cosec} 2A.$ [C. U. 1947]

বাম পক্ষ $= \dfrac{\cos 2A}{\sin 2A} + \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\cos 2A \cos A + \sin 2A \sin A}{\sin 2A \cos A}$

$$= \frac{\cos(2A - A)}{\sin 2A \cos A} = \frac{\cos A}{\sin 2A \cos A} = \frac{1}{\sin 2A}.$$

Ex. 4. *To find the expansions of*

(i) $\sin(A+B+C)$

(ii) $\cos(A+B+C)$

(iii) $\tan(A+B+C)$

(i) $\sin(A+B+C) = \sin\{(A+B)+C\}$

$$= \sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C$$

$$= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)\cos C + (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\sin C$$

$$= \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C$$

দ্রষ্টব্য 1. $\sin(A+B+C)$-এর বিস্তৃতিকে সহজেই

$\cos A \cos B \cos C(\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C)$-রূপে প্রকাশ করা যায়।

(ii) $\cos(A+B+C) = \cos\{(A+B)+C\}$

$$= \cos(A+B)\cos C - \sin(A+B)\sin C$$

$$= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\cos C - (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\sin C$$

$$= \cos A\cos B\cos C - \sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C - \cos A\sin B\sin C$$

দ্রষ্টব্য 2. $\cos(A+B+C)$-এর বিস্তৃতিকে সহজেই

$\cos A\cos B\cos C\,(1 - \tan B\tan C - \tan C\tan A - \tan A\tan B)$-রূপে প্রকাশ করা যায়।

(iii) $\mathbf{\tan(A+B+C)} = \tan\{(A+B)+C\}$

$$= \frac{\tan(A+B) + \tan C}{1 - \tan(A+B)\tan C}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} + \tan C}{1 - \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}\cdot\tan C}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A}.$$

দ্রষ্টব্য 3. নিম্নলিখিতরূপেও $\tan(A+B+C)$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করা যায় :—

আমরা জানি, $\tan(A+B+C) = \dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}.$

এক্ষণে, $\sin(A+B+C)$ এবং $\cos(A+B+C)$-এর বিস্তৃতি বসাইয়া হর ও লবকে $\cos A\cos B\cos C$ দ্বারা ভাগ করিলে অথবা দ্রষ্টব্য 1, ও 2-এ উক্ত $\sin(A+B+C)$ এবং $\cos(A+B+C)$-এর বিস্তৃতি বসাইলে আমরা উদ্দিষ্ট বিস্তৃতি নির্ণয় করিতে পারি।

লক্ষণীয় : চার, পাঁচ বা ততোধিক কোণের সমষ্টির কোণানুপাতও অনুরূপভাবে নির্ণয় করা যায়।

Ex. 5. *If* $\sin\theta = \dfrac{x-y}{x+y}$, *show that* $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

যেহেতু, $\dfrac{x-y}{x+y} = \sin\theta,$

অতএব, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{(\cos\frac{1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta)^2}{(\cos\frac{1}{2}\theta+\sin\frac{1}{2}\theta)^2}$

$$=\left\{\frac{1-\tan\frac{1}{2}\theta}{1+\tan\frac{1}{2}\theta}\right\}^2,$$ (লব ও হরকে $\cos^2\frac{1}{2}\theta$ দ্বারা ভাগ করিয়া)

$$=\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}^2;$$

সুতরাং, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{y}{x}}.$

Ex. 6. *If* $\cos(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\theta)=\cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\theta)$, *then* $\tan\theta=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$\frac{\sin(\gamma+\theta)}{\sin(\gamma-\theta)}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

অতএব, $\dfrac{\sin(\gamma+\theta)-\sin(\gamma-\theta)}{\sin(\gamma+\theta)+\sin(\gamma-\theta)}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$

বা, $\dfrac{2\cos\gamma\sin\theta}{2\sin\gamma\cos\theta}=\dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta}$

বা, $\cot\gamma\tan\theta=\tan\alpha\tan\beta.$

$\therefore\quad \tan\theta=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$

Ex. 7. *If* $\tan\beta=\dfrac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$, *then* $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ *are in harmonical progression.*

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$\frac{2}{\tan\beta}=\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$=\cot\gamma+\cot\alpha=\frac{1}{\tan\gamma}+\frac{1}{\tan\alpha}.$$

Ex. 8. *If* $\tan\alpha=\dfrac{a\sin\beta}{1-a\cos\beta}$ *and* $\tan\beta=\dfrac{b\sin\alpha}{1-b\cos\alpha}$,

then $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{a}{b}.$

প্রদত্ত প্রথম সমীকরণ হইতে $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}=\frac{a \sin \beta}{1-a \cos \beta}$

বা, $a(\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta)=\sin \alpha.$

$$\therefore \quad a=\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha+\beta)} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$b=\frac{\sin \beta}{\sin (\alpha+\beta)} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

সমীকরণ (1)-কে সমীকরণ (2) দ্বারা ভাগ করিলে

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Ex. 9. *Show that*

$$\tan(\beta+\gamma-2\alpha)+\tan(\gamma+\alpha-2\beta)+\tan(\alpha+\beta-2\gamma)$$
$$=\tan(\beta+\gamma-2\alpha)\tan(\gamma+\alpha-2\beta)\tan(\alpha+\beta-2\gamma).$$

মনে করি, $A=\beta+\gamma-2\alpha$, $B=\gamma+\alpha-2\beta$, $C=\alpha+\beta-2\gamma$,

$\therefore \quad A+B+C=0. \quad \therefore \quad \tan(A+B+C)=0,$

অর্থাৎ $\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A \tan B \tan C}{1-\tan A \tan B-\tan A \tan C-\tan B \tan C}=0.$

অতএব, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C.$

এক্ষণে A, B, C-এর মান বসাইলে আমরা নির্ণেয় সমীকরণ পাইব।

Ex. 10. *If* $a \sin(\theta+\alpha)=b \sin(\theta+\beta)$, *prove that*

$$\cot \theta=\frac{a \cos \alpha-b \cos \beta}{b \sin \beta-a \sin \alpha}.$$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে

$$a(\sin \theta \cos \alpha+\cos \theta \sin \alpha)=b(\sin \theta \cos \beta+\cos \theta \sin \beta).$$

$\therefore \quad \sin \theta(a \cos \alpha-b \cos \beta)=\cos \theta(b \sin \beta-a \sin \alpha).$

বা, $\cot \theta=\frac{a \cos \alpha-b \cos \beta}{b \sin \beta-a \sin \alpha}.$

Ex. 11. *If* $\tan \beta=\frac{n \sin \alpha \cos \alpha}{1-n \sin^2 \alpha}$, *show that*

$$\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan \alpha.$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan\alpha-\dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}{1+\tan\alpha\left(\dfrac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}\right)}$$

$$=\frac{\tan\alpha\left\{1-\dfrac{n\cos^2\alpha}{1-n\sin^2\alpha}\right\}}{1+\dfrac{n\sin^2\alpha}{1-n\sin^2\alpha}}=(1-n)\tan\alpha.$$

Ex. 12. *Prove that* $\dfrac{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}=\tan 55^\circ$.

$\dfrac{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}=\dfrac{1+\tan 10^\circ}{1-\tan 10^\circ}$ (লব ও হরকে $\cos 10^\circ$ দ্বারা ভাগ করিয়া)

$=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 10^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 10^\circ}$ $(\because\ \tan 45^\circ=1)$

$=\tan(45^\circ+10^\circ)=\tan 55^\circ$.

Ex. 13. *If* $A+B+C=90^\circ$, *prove that*

$$\tan A+\cos A\sec B\sec C=\tan B+\cos B\sec C\sec A$$
$$=\tan C+\cos C\sec A\sec B.$$

প্রথম রাশি $=\tan A+\dfrac{\cos A}{\cos B\cos C}=\tan A+\dfrac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}$

$[\therefore\ A=90^\circ-(B+C)]$

$$=\tan A+\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\tan A+\tan B+\tan C.$$

এইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, প্রতিটি রাশি $=\tan A+\tan B+\tan C$. অতএব, রাশিত্রয় সমান।

Examples VI

Show that (*Ex. 1 to 20*) :—

1. (i) $\sin(A-B)=\frac{16}{65}$ and $\cos(A+B)=\frac{33}{65}$,

if A and B are acute and if $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$.

(ii) $\cos 68^\circ 20'\cos 8^\circ 20'+\cos 81^\circ 40'\cos 21^\circ 40'=\frac{1}{2}$.

(iii) $\sec(x-y)=\frac{85}{84}$, if $\sec x=\frac{17}{8}$, $\operatorname{cosec} y=\frac{5}{4}$.

2. (i) $\sin A \sin (B-C) + \sin B \sin (C-A) + \sin C \sin (A-B) = 0.$

(ii) $\cos A \sin (B-C) + \cos B \sin (C-A) + \cos C \sin (A-B) = 0.$

(iii) $\sin (B+C) \sin (B-C) + \sin (C+A) \sin (C-A) + \sin (A+B) \sin (A-B) = 0.$

(iv) $\sin (\alpha-\theta) \sin (\beta-\gamma) + \sin (\beta-\theta) \sin (\gamma-\alpha) + \sin (\gamma-\theta) \sin (\alpha-\beta) = 0.$

3. $\cos (60^\circ - A) \cos (30^\circ - B) - \sin (60^\circ - A) \sin (30^\circ - B) = \sin (A+B).$

4. (i) $\sin (n+1)x \cos (n-1)x - \cos (n+1)x \sin (n-1)x = \sin 2x.$

(ii) $\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta = \sin 4\theta \cos \theta - \cos 4\theta \sin \theta.$

5. $\dfrac{\sin B}{\sin A} = \dfrac{\sin (2A+B)}{\sin A} - 2 \cos (A+B).$

6. $\dfrac{\sin (B-C)}{\cos B \cos C} + \dfrac{\sin (C-A)}{\cos C \cos A} + \dfrac{\sin (A-B)}{\cos A \cos B} = 0.$

7. $\dfrac{\sin (B-C)}{\sin B \sin C} + \dfrac{\sin (C-A)}{\sin C \sin A} + \dfrac{\sin (A-B)}{\sin A \sin B} = 0.$

8. $\tan (A+B) \tan (A-B) = \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}.$

9. $\tan^2 A - \tan^2 B = \dfrac{\sin (A+B) \sin (A-B)}{\cos^2 A \cos^2 B}.$

10. (i) $\dfrac{\tan (\alpha+\beta) - \tan \alpha}{1 + \tan (\alpha+\beta) \tan \alpha} = \tan \beta.$

(ii) If $A+B+C=\pi$ and $\cos A = \cos B \cos C$, show that $\tan A = \tan B + \tan C.$ [C. U. 1942]

11. $1 + \tan 2\theta \tan \theta = \sec 2\theta.$

12. $\cot \theta - \cot 2\theta = \operatorname{cosec} 2\theta.$

13. $\tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 25^\circ \tan 20^\circ = 1.$

14. (i) $\tan (45^\circ + A) = \dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}.$

(ii) $\sqrt{2} \sin (45^\circ + A) = \sin A + \cos A.$

15. $\dfrac{\cos 8^\circ + \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ - \sin 8^\circ} = \tan 53^\circ.$

16. $\tan (45^\circ + A) \tan (45^\circ - A) = 1.$

17. $\tan(A+B)+\tan(A-B)=\dfrac{\sin 2A}{\cos^2 A-\sin^2 B}$.

18. $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$.

19. $\cot(45^\circ+x)=\dfrac{\cot x-1}{\cot x+1}=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

20. $\sec(x+y)=\dfrac{\sec x\sec y}{1-\tan x\tan y}$.

21. Find the expansions of

$\sin(A-B+C)$ and $\tan(A-B-C)$.

22. Express $\cot(A+B+C)$ in terms of

$\cot A$, $\cot B$, $\cot C$.

23. (i) If $a\cos(x+\alpha)=b\cos(x-\alpha)$, prove that

$(a+b)\tan x=(a-b)\cot\alpha$.

(ii) If $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+1=0$, show that

$1+\cot\alpha\tan\beta=0$. [C. U. 1939]

(iii) If $A+B+C=\pi$ and $\cos A=\cos B\cos C$,

then $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$.

24. If $\tan\theta=\dfrac{a\sin x+b\sin y}{a\cos x+b\cos y}$,

then $a\sin(\theta-x)+b\sin(\theta-y)=0$.

25. An angle θ is divided into two parts α, β such that $\tan\alpha:\tan\beta=x:y$; prove that

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{x+y}\sin\theta.$$

26. If $\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)=-\frac{3}{2}$,

show that $\Sigma\cos\alpha=0$ and $\Sigma\sin\alpha=0$.

ANSWERS

21. $\sin A\cos B\cos C-\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B$
$+\sin A\sin B\sin C$;

$$\frac{\tan A-\tan B-\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1+\tan A\tan B+\tan C\tan A-\tan B\tan C}.$$

22. $\dfrac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1}$.

সপ্তম অধ্যায়

কোণানুপাতের গুণফল ও সমষ্টির রূপান্তর

(Transformation of Products and Sums)

7·1. গুণফলকে সমষ্টি বা অন্তরে রূপান্তর (Transformation of products into sums or differences)

6·1 এবং 6·2 অনুচ্ছেদ হইতে আমরা জানি যে,

$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A+B) \quad \cdots \quad (1)$$

$$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A-B) \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) যোগ করিলে দেখা যায়

$$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B) \quad \cdots \quad (3)$$

এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে

$$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B) \quad \cdots \quad (4)$$

পুনরায় 6·1 ও 6·2 অনুচ্ছেদ হইতে আমরা জানি যে,

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A+B) \quad \cdots \quad (5)$$

$$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A-B) \quad \cdots \quad (6)$$

(5) ও (6) যোগ করিলে,

$$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B) \quad \cdots \quad (7)$$

এবং (6) হইতে (5) বিয়োগ করিলে,

$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B) \quad \cdots \quad (8)$$

এইরূপে আমরা দুইটি সাইন বা কোসাইন-এর গুণফলকে দুইটি সাইন বা কোসাইনের সমষ্টি বা অন্তর হিসাবে প্রকাশ করিতে পারি।

$$\mathbf{2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)} \quad \cdots \quad (I)$$

$$\mathbf{2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)} \quad \cdots \quad (II)$$

$$\mathbf{2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)} \quad \cdots \quad (III)$$

$$\mathbf{2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)} \quad \cdots \quad (IV)$$

7·2. সমষ্টি বা অন্তরকে গুণফলে পরিবর্তন (Transformation of sums or differences into products).

মনে করি, $A+B=C$ এবং $A-B=D$

তাহা হইলে, $A=\frac{C+D}{2}$, $B=\frac{C-D}{2}$.

এক্ষণে পূর্ব অনুচ্ছেদের (8) কে আমরা এইভাবে লিখিতে পারি :—

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$=2\sin A(-\sin B)$$
$$=2\sin A\sin(-B)$$

অতএব, পূর্ব অনুচ্ছেদের (3), (4), (7) ও (8)-এ A এবং B-এর স্থানে উপরোক্ত মান বসাইলে দুইটি কোণের সাইন বা কোসাইনের সমষ্টি বা অন্তরকে সাইন বা কোসাইনের গুণফলে রূপান্তরের নিম্নলিখিত সূত্রগুলি পাওয়া যায় :—

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$$

দ্রষ্টব্য : উপরের চারিটি সূত্রের নিম্নলিখিত সংক্ষিপ্ত মৌখিক উল্লেখ বিশেষ সুবিধাজনক।

(i) $\text{sine}+\text{sine}=2\sin\left(\frac{\text{সমষ্টি}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{অন্তর}}{2}\right)$

(ii) $\text{sine}-\text{sine}=2\cos\left(\frac{\text{সমষ্টি}}{2}\right)\sin\left(\frac{\text{অন্তর}}{2}\right)$

(iii) $\cos+\cos=2\cos\left(\frac{\text{সমষ্টি}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{অন্তর}}{2}\right)$

(iv) $\cos-\cos=2\sin\left(\frac{\text{সমষ্টি}}{2}\right)\sin\left(\frac{\text{বিপরীত অন্তর}}{2}\right)$

7·3. Ex. 1. *Prove that*

(i) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

(ii) $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ = 0$

(i) বাম পক্ষ $= \frac{1}{2} \cos 20^\circ (2 \cos 40^\circ \cos 80^\circ)$

$$= \tfrac{1}{2} \cos 20^\circ \{\cos 120^\circ + \cos 40^\circ\}$$
$$= \tfrac{1}{2} \cos 20^\circ (-\tfrac{1}{2} + \cos 40^\circ)$$
$$= -\tfrac{1}{4} \cos 20^\circ + \tfrac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$
$$= -\tfrac{1}{4} \cos 20^\circ + \tfrac{1}{4}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)$$
$$= \tfrac{1}{4} \cos 60^\circ = \tfrac{1}{8}.$$

(ii) বাম পক্ষ $= (\cos 80^\circ + \cos 40^\circ) - \cos 20^\circ$

$$= 2 \cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ$$
$$= 2.\tfrac{1}{2} \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = 0.$$

Ex. 2. *Show that*

$$\frac{\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta} = \tan 3\theta.$$

বাম পক্ষের লব $= (\sin 5\theta + \sin \theta) + (\sin 2\theta + \sin 4\theta)$

$$= 2 \sin 3\theta \cos 2\theta + 2 \sin 3\theta \cos \theta$$
$$= 2 \sin 3\theta (\cos 2\theta + \cos \theta).$$

বাম পক্ষের হর $= (\cos 5\theta + \cos \theta) + (\cos 4\theta + \cos 2\theta)$

$$= 2 \cos 3\theta \cos 2\theta + 2 \cos 3\theta \cos \theta$$
$$= 2 \cos 3\theta (\cos 2\theta + \cos \theta).$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $= \dfrac{2 \sin 3\theta (\cos 2\theta + \cos \theta)}{2 \cos 3\theta (\cos 2\theta + \cos \theta)} = \tan 3\theta.$

Ex. 3. *Express 4 cos A cos B cos C as the sum of four cosines.*

$4 \cos A \cos B \cos C = 2 \cos A . (2 \cos B \cos C)$

$$= 2 \cos A \{\cos (B + C) + \cos (B - C)\}$$
$$= 2 \cos A \cos (B + C) + 2 \cos A \cos (B - C)$$
$$= \cos (A + B + C) + \cos (A - B - C)$$
$$+ \cos (A + B - C) + \cos (A - B + C).$$

Ex. 4. *Express as the product of three sines*

$$\sin (B + C - A) + \sin (C + A - B) + \sin (A + B - C)$$
$$- \sin (A + B + C).$$

প্রদত্ত রাশিমালা $= \{\sin (B+C-A) + \sin (C+A-B)\}$
$+\{\sin (A+B-C) - \sin (A+B+C)\}$
$= 2 \sin C \cos (B-A) + 2 \cos (A+B) \sin (-C)$
$= 2 \sin C \{\cos (B-A) - \cos (A+B)\}$
$= 2 \sin C.\ 2 \sin B \sin A$
$= 4 \sin A \sin B \sin C.$

Ex. 5. *If the angles A, B, C be in A. P., then*

$$\frac{\sin A - \sin C}{\cos C - \cos A} = \cot B.$$

যেহেতু A, B, C রাশিত্রয় সমান্তর শ্রেণীভুক্ত, অতএব, $2B = A + C$.

এক্ষণে, $$\frac{\sin A - \sin C}{\cos C - \cos A} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+C) \sin \frac{1}{2}(A-C)}{2 \sin \frac{1}{2}(A+C) \sin \frac{1}{2}(A-C)}$$
$$= \frac{\cos B}{\sin B} = \cot B.$$

Ex. 6. *Show that* $\sin 18° + \cos 18° = \sqrt{2} \cos 27°$.

বাম পক্ষ $= \sin (90° - 72°) + \cos 18° = \cos 72° + \cos 18°$
$= 2 \cos 45° \cos 27° = \sqrt{2} \cos 27°.$

Ex. 7. *Show that*

$$\sin (\beta - \gamma) \cos (\alpha - \delta) + \sin (\gamma - \alpha) \cos (\beta - \delta) + \sin (\alpha - \beta) \cos (\gamma - \delta) = 0.$$

বাম পক্ষ $= \frac{1}{2}[2 \sin (\beta - \gamma) \cos (\alpha - \delta) + 2 \sin (\gamma - \alpha) \cos (\beta - \delta)$
$+ 2 \sin (\alpha - \beta) \cos (\gamma - \delta)]$
$= \frac{1}{2}[\sin (\beta - \gamma + \alpha - \delta) + \sin (\beta - \gamma - \alpha + \delta)$
$+ \sin(\gamma - \alpha + \beta - \delta) + \sin (\gamma - \alpha - \beta + \delta)$
$+ \sin (\alpha - \beta + \gamma - \delta) + \sin (\alpha - \beta - \gamma + \delta)]$
$= 0.$

Ex. 8. *Show that*

$$4 \sin \frac{A+B+C}{2} \sin \frac{B+C-A}{2} \sin \frac{C+A-B}{2} \sin \frac{A+B-C}{2}$$
$$= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

আমরা জানি, $$2 \sin \frac{A+B+C}{2} \sin \frac{B+C-A}{2} = \cos A - \cos (B+C)$$
$$2 \sin \frac{C+A-B}{2} \sin \frac{A+B-C}{2} = \cos (B-C) - \cos A.$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $= \{\cos A - \cos(B+C)\}\{\cos(B-C) - \cos A\}$

$$= \cos A \cos(B-C) - \cos(B+C)\cos(B-C) - \cos^2 A + \cos A \cos(B+C)$$

$$= \cos A\,[\cos(B-C) + \cos(B+C)] - [\cos^2 B - \sin^2 C] - \cos^2 A$$

$$= \cos A . 2\cos B \cos C - \cos^2 B + (1 - \cos^2 C) - \cos^2 A$$

$$= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C.$$

Ex. 9. *Show that*

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\sin^2\frac{x-y}{2}.$$

বাম পক্ষ $= \left(2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}\right)^2 + \left(2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)^2$

$$= 4\sin^2\frac{x-y}{2}\cdot\left[\sin^2\frac{x+y}{2} + \cos^2\frac{x+y}{2}\right] = 4\sin^2\frac{x-y}{2}.$$

Ex. 10. *If* $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)} = \dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)} = \dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$, *prove that*

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta) + \frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma) + \frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha) = 0$$

[Pat. U. 1945]

$\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)} = \dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)} = \dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$ হইলে, আমরা জানি

$$\frac{x}{y} = \frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}\Big/\frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos(\theta+\beta)}$$

$$= \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)}{\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\alpha)} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{y}{z} = \frac{\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\gamma)} = \frac{\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\gamma)}{\cos(\theta+\beta)\sin(\theta+\gamma)} \quad \cdots \quad (2)$$

এবং $\dfrac{z}{x} = \dfrac{\tan(\theta+\gamma)}{\tan(\theta+\alpha)} = \dfrac{\sin(\theta+\gamma)\cos(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\gamma)\sin(\theta+\alpha)} \quad \cdots \quad (3)$

(1) হইতে Componendo and dividendo-প্রথা অনুসরণ করিলে আমরা জানি যে,

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta) + \cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}{\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta) - \cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$$

$$= \frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

$$\therefore \quad \frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\tfrac{1}{2}[\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)].$$

সুতরাং,

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\tfrac{1}{2}[\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)] \quad \cdots (4)$$

অনুরূপভাবে,

$$\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)=\tfrac{1}{2}[\cos(2\theta+2\gamma)-\cos(2\theta+2\beta)] \quad \cdots (5)$$

এবং, $$\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=\tfrac{1}{2}[\cos(2\theta+2\alpha)-\cos(2\theta+2\gamma)] \quad \cdots (6)$$

(4), (5) ও (6)-কে যোগ করিলে আমরা দেখাইতে পারি যে,

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0.$$

Examples VII

Prove that (*Ex. 1 to 17*) :—

1. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\tan\dfrac{A+B}{2}\cot\dfrac{A-B}{2}$.

2. $\dfrac{\cos A+\cos B}{\cos B-\cos A}=\cot\dfrac{A+B}{2}\cot\dfrac{A-B}{2}$.

3. $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=0$.

4. $\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\frac{1}{4}\sin 3\theta$.

5. $\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)=\frac{1}{4}\cos 3\theta$.

6. $(\sin 3\alpha+\sin\alpha)\sin\alpha+(\cos 3\alpha-\cos\alpha)\cos\alpha=0$.

7. $\cos(A-D)\sin(B-C)+\cos(B-D)\sin(C-A)$
$+\cos(C-D)\sin(A-B)=0$.

8. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{16}$.

9. $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$.

10. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\dfrac{A+B}{2}$.

11. $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \dfrac{A+B}{2}$.

12. $\dfrac{\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta} = \tan 4\theta$.

13. $\dfrac{\sin 2A + \sin 5A - \sin A}{\cos 2A + \cos 5A + \cos A} = \tan 2A$.

14. $\dfrac{\sin (\alpha+\beta) - 2 \sin \alpha + \sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha+\beta) - 2 \cos \alpha + \cos (\alpha-\beta)} = \tan \alpha$.

15. $\dfrac{\cos 7a + \cos 3a - \cos 5a - \cos a}{\sin 7a - \sin 3a - \sin 5a + \sin a} = \cot 2a$.

16. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C - \sin 2(A+B+C)$
$= 4 \sin (B+C) \sin (C+A) \sin (A+B)$.

17. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos (A+B+C)$
$= 4 \cos \dfrac{B+C}{2} \cos \dfrac{C+A}{2} \cos \dfrac{A+B}{2}$.

18. If $\sin x = k \sin y$, prove that

$$\tan \tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{k-1}{k+1} \tan \tfrac{1}{2}(x+y).$$

19. If $\cos x + \cos y = \frac{1}{3}$ and $\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$, prove that
$\tan \frac{1}{2}(x+y) = \frac{3}{4}$.

20. If $x \cos \alpha + y \sin \alpha = k = x \cos \beta + y \sin \beta$, prove that

$$\frac{x}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

21. If $\sin \theta + \sin \phi = a$, $\cos \theta + \cos \phi = b$, prove that

$$\tan \frac{\theta - \phi}{2} = \pm \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}.$$

22. Prove that $\dfrac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \tan 35^\circ$.

[*Note that* $\sin \theta = \cos (90^\circ - \theta)$ *and* $\cos \theta = \sin (90^\circ \pm \theta)$.]

23. If $\operatorname{cosec} A + \sec A = \operatorname{cosec} B + \sec B$, then
$\tan A + \tan B = \cot \frac{1}{2}(A+B)$. [P. U. 1936]

24. Prove that

$$\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n = 2 \cot^n \frac{A-B}{2},$$

or zero, according as n is even or odd. [P. U. 1933]

অষ্টম অধ্যায়

গুণিতক কোণ

(Multiple Angles)

8·1. 2A-কোণের কোণানুপাত (Trigonometrical ratios of angle 2A).

6·1 ও 6·2 অনুচ্ছেদে প্রমাণ করা হইয়াছে যে, A ও B দুইটি সূক্ষ্মকোণ হইলে

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad \cdots \quad (1)$$

$$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \cdots \quad (2)$$

উপরন্তু, A ও B সূক্ষ্মকোণ না হইলেও এই সূত্র দুইটি সর্বদাই সত্য। অতএব, A-কোণের মান যাহাই হউক না কেন, আমরা B = A বসাইলে (1) ও (2) সূত্রগুলি হইতে জানিতে পারি যে,

$$\mathbf{\sin 2A} = \sin A \cos A + \cos A \sin A = \mathbf{2 \sin A \cos A} \quad \cdots \quad (I)$$

$$\mathbf{\cos 2A} = \cos A \cos A - \sin A \sin A = \mathbf{\cos^2 A - \sin^2 A} \quad \cdots \quad (II)$$

$$= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A = \mathbf{1 - 2 \sin^2 A} \quad \cdots \quad (III)$$

$$= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = \mathbf{2 \cos^2 A - 1} \quad \cdots \quad (IV)$$

পুনরায়, 6·4 অনুচ্ছেদ হইতে

$$\tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

অতএব, B = A বসাইলে,

$$\mathbf{\tan 2A} = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \cdot \tan A} = \mathbf{\frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}} \quad \cdots \quad (V)$$

অনুরূপভাবে, cot (A + B)-এর সূত্রটিতে B = A বসাইলে আমরা দেখাইতে পারি যে,

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} \quad \cdots \quad (VI)$$

(III) ও (IV) হইতে জানা যায় যে,

$$1 + \cos 2A = 2\cos^2 A \qquad \cdots \text{(VII)}$$

$$1 - \cos 2A = 2\sin^2 A \qquad \cdots \text{(VIII)}$$

(VIII)-কে (VII)-দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A \qquad \cdots \text{(IX)}$$

ইহা লক্ষ্য করা যায় যে,

$$1 + \sin 2A = \cos^2 A + \sin^2 A + 2\sin A\cos A = (\sin A + \cos A)^2$$
$$1 - \sin 2A = \cos^2 A + \sin^2 A - 2\sin A\cos A = (\sin A - \cos A)^2.$$

দ্রষ্টব্য : যেহেতু সমষ্টিসূত্রাবলী (Addition Formulæ) A ও B-এর যে-কোন মানের জন্যই সত্য, উহাদের সাহায্যে প্রাপ্ত উপরোক্ত সূত্রগুলি A কোণের মান যাহাই হউক না কেন, সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

8·2. 3A-কোণের কোণানুপাত

$$\sin 3A = \sin(A + 2A) = \sin A\cos 2A + \cos A\sin 2A$$
$$= \sin A(1 - 2\sin^2 A) + \cos A \,.\, 2\sin A\cos A.$$

[8·1 অনুচ্ছেদ]

$$= \sin A(1 - 2\sin^2 A) + 2\sin A(1 - \sin^2 A).$$

$$\therefore\ \mathbf{\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A.}$$

$$\cos 3A = \cos(A + 2A) = \cos A\cos 2A - \sin A\sin 2A$$
$$= \cos A(2\cos^2 A - 1) - \sin A \,.\, 2\sin A\cos A$$
$$= \cos A(2\cos^2 A - 1) - 2\cos A(1 - \cos^2 A).$$

$$\therefore\ \mathbf{\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.}$$

$$\tan 3A = \tan(A + 2A) = \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A\tan 2A}$$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}{1 - \tan A\cdot\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}$$

$$= \frac{\tan A(1-\tan^2 A) + 2\tan A}{(1-\tan^2 A) - 2\tan^2 A}$$

$$\therefore\ \mathbf{\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.}$$

দ্রষ্টব্য ঃ পূর্বের অনুচ্ছেদে বর্ণিত নিয়মের সাহায্যে A-কোণের যে-কোন উচ্চতর গুণিতকের কোণানুপাত A-কোণের কোণানুপাতের সাহায্যে অনুরূপ-ভাবে প্রকাশ করা যায়।

8·3. Ex. 1. *Express sin 2A and cos 2A in terms of tan A.*

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\cos^2 A$$

$$= \frac{2\tan A}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - \cos^2 A\cdot\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \cos^2 A\left(1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right) = \cos^2 A\,(1 - \tan^2 A)$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$$

Ex. 2. *Express cos 4A in terms of cos A.*

মনে করি, $\theta = 2A$.

অতএব, $\cos 4A = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cos^2 2A - 1$

$$= 2(\cos 2A)^2 - 1 = 2(2\cos^2 A - 1)^2 - 1$$

$$= 2(4\cos^4 A - 4\cos^2 A + 1) - 1$$

$$= 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1.$$

Ex. 3. *Show that* $\frac{1-tan^2(45°-A)}{1+tan^2(45°-A)} = sin\ 2A.$

যদি $45° - A = \theta$ লিখি, তাহা হইলে,

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\sin^2\theta/\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta/\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \cos 2\theta = \cos(90° - 2A) = \sin 2A.$$

Ex. 4. *If* $tan\ \theta = \frac{x}{y}$, *find the value of* $x\ sin\ 2\theta + y\ cos\ 2\theta$.

[B. H. U. 1940]

যেহেতু $\tan\theta = \frac{x}{y}$, $\therefore\ x\cos\theta = y\sin\theta$ ··· (1)

এখানে, $x \sin 2\theta + y \cos 2\theta = x \,.\, 2 \sin\theta \cos\theta + y\,.\,(-2\sin^2\theta + 1)$
$= 2\sin\theta\,(x\cos\theta - y\sin\theta) + y = y.$ [(1) হইতে]

Ex. 5. *If* $\tan\theta = \sec 2\alpha$, *prove that* $\sin 2\theta = \dfrac{1-\tan^4\alpha}{1+\tan^4\alpha}$.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta = \frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2\sec 2\alpha}{1+\sec^2 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha + 1} = \frac{2\cdot\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{\left(\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)^2 + 1} \quad \text{[Ex. 1-দ্বারা]}$$

$$= \frac{2(1-\tan^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)}{(1-\tan^2\alpha)^2 + (1+\tan^2\alpha)^2} = \frac{2\,(1-\tan^4\alpha)}{2\,(1+\tan^4\alpha)} = \frac{1-\tan^4\alpha}{1+\tan^4\alpha}$$

Ex. 6. *Show that*

$$\tan\theta + 2\tan 2\theta + 4\tan 4\theta + 8\cot 8\theta = \cot\theta.$$

$$8\cot 8\theta = 8\cdot\frac{1}{\tan 8\theta} = 8\cdot\frac{1-\tan^2 4\theta}{2\tan 4\theta} = 4\cdot\frac{1-\tan^2 4\theta}{\tan 4\theta}.$$

$$\therefore\ 8\cot 8\theta + 4\tan 4\theta = 4\cdot\frac{1-\tan^2 4\theta}{\tan 4\theta} + 4\tan 4\theta$$

$$= 4\cdot\frac{1}{\tan 4\theta} = 4\cdot\frac{1-\tan^2 2\theta}{2\tan 2\theta}.$$

$$\therefore\ 8\cot 8\theta + 4\tan 4\theta + 2\tan 2\theta = 4\cdot\frac{1-\tan^2 2\theta}{2\tan 2\theta} + 2\tan 2\theta$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\tan 2\theta} = 2\cdot\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}.$$

সুতরাং, বাম পক্ষ $= 2\cdot\dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} + \tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$

Ex. 7. *If* $\operatorname{cosec} 2A + \operatorname{cosec} 2B + \operatorname{cosec} 2C = 0$, *show that*
$\tan A + \tan B + \tan C + \cot A + \cot B + \cot C = 0.$

$$\tan A + \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A\cos A} = \frac{1}{\sin A\cos A}$$

$$= \frac{2}{2\sin A\cos A} = \frac{2}{\sin 2A} = 2\operatorname{cosec} 2A.$$

অনুরূপভাবে, $\tan B + \cot B = 2 \operatorname{cosec} 2B,$
$\tan C + \cot C = 2 \operatorname{cosec} 2C.$

সুতরাং, বামপক্ষ $= 2\,[\operatorname{cosec} 2A + \operatorname{cosec} 2B + \operatorname{cosec} 2C] = 0.$

Ex. 8. *Prove that*

$$\frac{2 \cos 8\theta + 1}{2 \cos \theta + 1} = (2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1)(2 \cos 4\theta - 1).$$

$$(2 \cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) = 4 \cos^2\theta - 1 = 2(2 \cos^2\theta - 1) + 1$$
$$= 2 \cos 2\theta + 1 \quad \cdots \quad (1)$$

অনুরূপভাবে, $(2 \cos 2\theta + 1)(2 \cos 2\theta - 1) = 2 \cos 4\theta + 1 \quad \cdots \quad (2)$

এবং $(2 \cos 4\theta + 1)(2 \cos 4\theta - 1) = 2 \cos 8\theta + 1 \quad \cdots \quad (3)$

এখন, সমীকরণ (1), (2), (3)-কে পরস্পর গুণ করিলে আমরা দেখিতে পাই

$$(2 \cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1)(2 \cos 4\theta - 1)$$
$$= 2 \cos 8\theta + 1.$$

অতএব, $\dfrac{2 \cos 8\theta + 1}{2 \cos \theta + 1} = (2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1)(2 \cos 4\theta - 1).$

Ex. 9. *Prove that* $\cos^2 (\alpha - \beta) - \sin^2 (\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta.$

বাম পক্ষ $= (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2 - (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2$
$= \cos^2\alpha \cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta - \sin^2\alpha \cos^2\beta - \cos^2\alpha \sin^2\beta$
$= \cos^2\alpha\,(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - \sin^2\alpha\,(\cos^2\beta - \sin^2\beta)$
$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\beta - \sin^2\beta)$
$= \cos 2\alpha \cos 2\beta.$

Ex. 10. *If* $\tan^2 x = 2 \tan^2 y + 1$, *then* $\cos 2x + \sin^2 y = 0.$

আমরা জানি $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$ [Ex. 1. হইতে]

$$\therefore \quad \cos 2x = \frac{1 - (2 \tan^2 y + 1)}{1 + (2 \tan^2 y + 1)} = \frac{-2 \tan^2 y}{2(1 + \tan^2 y)} = \frac{-\tan^2 y}{\sec^2 y}$$
$$= -\sin^2 y.$$

$\therefore \quad \cos 2x + \sin^2 y = 0.$

Ex. 11. *Show that* $\sec x = \dfrac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4x}}}.$

আমরা জানি $2\cos^2 A = 1+\cos 2A$.

$\therefore \quad 2\cos^2 2x = 1+\cos 4x$.

বা, $\quad 4\cos^2 2x = 2+2\cos 4x$.

$\therefore \quad 2\cos 2x = \sqrt{2+2\cos 4x}$.

অনুরূপভাবে, $2\cos x = \sqrt{2+2\cos 2x}$

$= \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 2x}}$.

$\therefore \quad \sec x = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 2x}}}$.

Ex. 12. *Show that* $\tan 3A - \tan 2A - \tan A$
$= \tan 3A \tan 2A \tan A$.

আমরা জানি $\tan 3A = \tan(2A+A) = \dfrac{\tan 2A + \tan A}{1-\tan 2A \tan A}$,

বা, $\tan 3A - \tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 2A + \tan A$.

$\therefore \quad \tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A$.

Examples VIII

Prove the following identities (*Ex. 1* to *25*) :—

1. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$.

2. $\dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \cot A$.

3. $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$.

4. (i) $(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1) = 2\cos 2\theta + 1$.

(ii) $\tan\theta\,(1+\sec 2\theta) = \tan 2\theta$.

5. $\dfrac{\cot A - \tan A}{\cot A + \tan A} = \cos 2A$.

6. $\tan A + \cot A = 2\,\text{cosec}\,2A$.

7. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$.

8. $\cos^6\theta - \sin^6\theta = \cos 2\theta\,(1-\frac{1}{4}\sin^2 2\theta)$.

9. $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{1}{4}(1+3\cos^2 2\theta)$.

10. $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta} = \tan(\alpha+\beta)$.

11. (i) $\dfrac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\tan \theta.$ [C. U. 1938]

(ii) $\dfrac{\sin \alpha-\sqrt{1+\sin 2\alpha}}{\cos \alpha-\sqrt{1+\sin 2\alpha}}=\cot \alpha,$ [α being positive and acute, and the square root being taken with positive sign.]

12. $\dfrac{\cos \theta+\sin \theta}{\cos \theta-\sin \theta}-\dfrac{\cos \theta-\sin \theta}{\cos \theta+\sin \theta}=2 \tan 2\theta.$

13. (i) $\dfrac{\sin A+\sin 2A}{1+\cos A+\cos 2A}=\tan A.$

(ii) $\dfrac{\sin 4\theta}{\cos 2\theta}\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{1-\cos 4\theta}=\tan \theta.$

14. (i) $\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=\sec 2A-\tan 2A.$

(ii) $\dfrac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\cos \theta+\sin \theta}=1-\frac{1}{2}\sin 2\theta.$

15. $\cos^3 A \cos 3A+\sin^3 A \sin 3A=\cos^3 2A.$

16. (i) $4(\cos^3 10^\circ+\sin^3 20^\circ)=3(\cos 10^\circ+\sin 20^\circ).$

(ii) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4.$

17. $\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan \theta=\tan 3\theta \tan 2\theta \tan \theta.$

18. $\dfrac{\cot A}{\cot A-\cot 3A}-\dfrac{\tan A}{\tan 3A-\tan A}=1.$

19. $\dfrac{1}{\tan 3\theta-\tan \theta}-\dfrac{1}{\cot 3\theta-\cot \theta}=\cot 2\theta.$

20. $\sin 8\theta=8 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta.$

21. (i) $\cos 5\theta=16 \cos^5\theta-20 \cos^3\theta+5 \cos \theta.$

(ii) $\sin 5\theta=16 \sin^5\theta-20 \sin^3\theta+5 \sin \theta.$

22. (i) $\cot 3\theta=\dfrac{\cot^3\theta-3 \cot \theta}{3 \cot^2\theta-1}.$

(ii) $\tan 4\theta=\dfrac{4 \tan \theta-4 \tan^3\theta}{1-6 \tan^2\theta+\tan^4\theta}.$

23. (i) $\cos(120° - A) + \cos A + \cos(120° + A) = 0$.

(ii) $\cos^2(A - 120°) + \cos^2 A + \cos^2(A + 120°) = \frac{3}{2}$.

24. $$\frac{2\cos 2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1} = (2\cos\theta - 1)(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 2^2\theta - 1) \ldots\ldots(2\cos 2^{n-1}\theta - 1).$$

[Use $(2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 2\cos 2\theta + 1$.]

25. $$\frac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta} = (1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 2^2\theta)(1 + \sec 2^3\theta)\ldots\ldots(1 + \sec 2^n\theta).$$

[Use $\tan\theta\,(1 + \sec 2\theta) = \tan 2\theta$.]

26. If $\theta = \frac{\pi}{2^n + 1}$, prove that

$$2^n \cos\theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots \cos 2^{n-1}\theta = 1.$$

27. (i) If $\tan x = b/a$, find the value of $a\cos 2x + b\sin 2x$.

(ii) If $\tan^2 x + 2\tan x \tan 2y = \tan^2 y + 2\tan y \tan 2x$, prove that each side $= 1$, or else, $\tan x = \pm \tan y$.

28. If $\tan^2\theta = 1 + 2\tan^2\phi$, show that $\cos 2\phi = 1 + 2\cos 2\theta$.

29. (i) If $2\tan\alpha = 3\tan\beta$, prove that

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}.$$ [C. U. 1946]

(ii) If $\frac{\tan(\alpha - \beta - \gamma)}{\tan(\alpha - \beta + \gamma)} = \frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$, show that

either, $\sin(\beta - \gamma) = 0$, *or*, $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$.

30. If α and β are acute angles and $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$, show that $\tan\alpha = \sqrt{2}\tan\beta$. [C. U. 1941]

31. If $\cos\theta = \frac{1}{2}(a + a^{-1})$, show that

(i) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}(a^2 + a^{-2})$.

(ii) $\cos 3\theta = \frac{1}{2}(a^3 + a^{-3})$.

Show that (*Ex 32 to 36*) :—

32. $\sin^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$.

33. $\cos^8\theta + \sin^8\theta = 1 - \sin^2 2\theta + \frac{1}{8}\sin^4 2\theta$.

34. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\text{A}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\text{A}\right)=2\sec 2\text{A}$.

35. $\cos^3\theta\,\frac{\sin 3\theta}{3}+\sin^3\theta\,\frac{\cos 3\theta}{3}=\frac{\sin 4\theta}{4}$.

36. $\cos 4x-\cos 4y$

$$=8(\cos x-\cos y)(\cos x+\cos y)(\cos x-\sin y)\times(\cos x+\sin y).$$

ANSWERS

27. (i) a.

নবম অধ্যায়

অংশ কোণ

(Submultiple Angles)

9·1. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

$$1 + \cos 2A = 2\cos^2 A \; ; \qquad 1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}.$$

উপরোক্ত গুণিতক কোণগুলির সূত্রাবলীতে যথাক্রমে $A = \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{3}$, বসাইলে আমরা অংশ-কোণের নিম্নলিখিত সূত্রাবলী পাই :

$$\boldsymbol{\sin \theta = 2 \sin \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta}$$

$$\boldsymbol{\cos \theta = \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta - \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}$$

$$\boldsymbol{1 + \cos \theta = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta \; ; \qquad 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}$$

$$\boldsymbol{\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{1}{2}\theta}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}\theta}}$$

$$\boldsymbol{\sin \theta = 3 \sin \tfrac{1}{3}\theta - 4 \sin^3 \tfrac{1}{3}\theta}$$

$$\boldsymbol{\cos \theta = 4 \cos^3 \tfrac{1}{3}\theta - 3 \cos \tfrac{1}{3}\theta}$$

$$\boldsymbol{\tan \theta = \frac{3 \tan \frac{1}{3}\theta - \tan^3 \frac{1}{3}\theta}{1 - 3 \tan^2 \frac{1}{3}\theta}.}$$

9·2. $\cos \theta$-র সাহায্যে $\sin \frac{1}{2}\theta$ ও $\cos \frac{1}{2}\theta$-র মান প্রকাশ :

$1 + \cos \theta = 2\cos^2 \frac{1}{2}\theta$ এবং $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$; এই সূত্র দুইটি হইতে অনায়াসেই পাওয়া যায় যে,

$$\sin \tfrac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos \theta)}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos \theta)}.$$

9·3. দ্ব্যর্থক চিহ্নের কারণ-বিশ্লেষণ (Ambiguity of Signs).

একাদশ অধ্যায়ে প্রমাণ করা হইবে যে, $\cos\theta$-র কোন নির্দিষ্ট মান দেওয়া থাকিলে, θ এবং সেই সঙ্গে $\frac{1}{2}\theta$-র কেবলমাত্র একটি মান হইবে না ; θ-র মান সেক্ষেত্রে বহু, এবং সেই মানগুলি একটি শ্রেণীর অন্তর্গত। অর্থাৎ $\frac{1}{2}\theta$ যে-কোন পাদে অবস্থিত হইতে পারে এবং সেই অনুসারে $\sin\frac{1}{2}\theta$ ও $\cos\frac{1}{2}\theta$-র মান নির্দিষ্ট হইবে।

$\frac{1}{2}\theta$ কোন্ পাদে অবস্থিত তাহা জানা থাকিলে $\cos\frac{1}{2}\theta$ ও $\sin\frac{1}{2}\theta$-র উপযুক্ত চিহ্ন নির্ধারণ করা মোটেই কষ্টসাধ্য নয় ; $\cos\theta$-র মানের সহিত θ জানা থাকিলে $\cos\frac{1}{2}\theta$ এবং $\sin\frac{1}{2}\theta$-র চিহ্ন নির্ণয় করার পদ্ধতি নিম্নলিখিত উদাহরণে দেখান হইতেছে :

উদা। *Find* $\sin 22\frac{1}{2}°$ *and* $\cos 22\frac{1}{2}°$.

যেহেতু $22\frac{1}{2}°$ কোণটি প্রথম পাদে অবস্থিত, অতএব, সাইন ও কস উভয়েই ধনাত্মক হইবে।

সুতরাং, $\sin 22\frac{1}{2}° = +\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 45°)}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\cos 22\frac{1}{2}° = +\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 45°)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

9·4. $\sin\theta$-র সাহায্যে $\sin\frac{1}{2}\theta$ এবং $\cos\frac{1}{2}\theta$-র মান নির্ণয় :

আমরা জানি যে, $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$

এবং $1 = \cos^2\frac{1}{2}\theta + \sin^2\frac{1}{2}\theta.$

$$\therefore\ 1+\sin\theta = (\cos\tfrac{1}{2}\theta + \sin\tfrac{1}{2}\theta)^2$$

$$1-\sin\theta = (\cos\tfrac{1}{2}\theta - \sin\tfrac{1}{2}\theta)^2.$$

সুতরাং, $\cos\frac{1}{2}\theta + \sin\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{1+\sin\theta}$

$\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{1-\sin\theta}$

অতএব, $\cos\frac{1}{2}\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}.$

$\sin\frac{1}{2}\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$

9·5. দ্ব্যর্থক চিহ্নের কারণ-বিশ্লেষণ (Ambiguity of Signs).

একাদশ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইবে যে, θ-র কোন নির্দিষ্ট মান দেওয়া না থাকিলে, কেবলমাত্র $\sin\theta$-র মান দেওয়া থাকিলে, θ-র মান হইবে বহু এবং এই সকল মান একটি শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত। অতএব, $\frac{1}{2}\theta$ সম্ভাব্য দুইটি পাদের যে-কোন একটিতে থাকিতে পারে।

এক্ষণে, $\cos\frac{1}{2}\theta+\sin\frac{1}{2}\theta=\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta\right)$

এবং $\cos\frac{1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta=\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\theta\right)$;

অতএব, $(\cos\frac{1}{2}\theta+\sin\frac{1}{2}\theta)$ এবং $(\cos\frac{1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta)$-র চিহ্ন নির্ভর করিবে θ-র মানের উপর এবং উপরের অভেদ দুইটি হইতে চিহ্ন নির্ণয় করা যাইবে।

উদা। *Find sin* 15° *and cos* 15°.

আমরা জানি,

$$\cos 15^\circ+\sin 15^\circ=+\sqrt{1+\sin 30^\circ}=\sqrt{1+\tfrac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=+\sqrt{1-\sin 30^\circ}=\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

[যেহেতু, $\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi-15^\circ\right)$ ধনাত্মক]

অতএব, $$\cos 15^\circ=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

9·6. $\tan\theta$-দ্বারা $\tan\frac{1}{2}\theta$-র মান নির্ণয় :

$$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}.$$

অর্থাৎ, $\tan\theta.\tan^2\frac{1}{2}\theta+2\tan\frac{1}{2}\theta-\tan\theta=0.$

অতঃপর দ্বিঘাত-সমীকরণের সূত্রানুসারে,

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan^2\theta}}{2\tan\theta}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}.$$

এস্থলেও, দ্ব্যর্থক চিহ্নের কারণ পূর্বোক্ত কারণের অনুরূপ।

9·7. θ-র কোণানুপাতের মান হইতে $\frac{1}{3}\theta$-র কোণানুপাতের মান নির্ণয় :

ত্রিঘাত-সমীকরণ, $\sin\theta=3\sin\frac{1}{3}\theta-4\sin^3\frac{1}{3}\theta \quad \cdots (1)$

সমাধান করিয়া আমরা $\sin\theta$-র প্রদত্ত মানের সাহায্যে $\sin\frac{1}{3}\theta$-র মান নির্ণয় করিতে পারি।

এইরূপে, $\cos\theta = 4\cos^3\frac{1}{3}\theta - 3\cos\frac{1}{3}\theta$ ... (2)

এবং $\tan\theta = \dfrac{3\tan\frac{1}{3}\theta - \tan^3\frac{1}{3}\theta}{1 - 3\tan^2\frac{1}{3}\theta}$ ... ... (3)

এই দুইটি সমীকরণ সমাধান করিলে, $\cos\theta$ এবং $\tan\theta$-র প্রদত্ত মান হইতে যথাক্রমে $\cos\frac{1}{3}\theta$ এবং $\tan\frac{1}{3}\theta$-র মান নির্ণয় করা যায়।

9·9. 18° এবং 36° কোণদ্বয়ের কোণানুপাত :

মনে করি, $\theta = 18°$, তাহা হইলে $5\theta = 90°$.

$\therefore\ 2\theta = 90° - 3\theta$, অর্থাৎ, $\sin 2\theta = \cos 3\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3)$

কিন্তু, $\cos\theta = \cos 18°$, সুতরাং, $\cos\theta$ শূন্য হইবে না।

অতএব, $2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 1 - 4\sin^2\theta$,

বা, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$.

$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4.4}}{2.4} = \dfrac{(\pm\sqrt{5} - 1)}{4}$.

কিন্তু, θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $\sin\theta$ ধনাত্মক হইবে। বস্তুতঃ, θ-র সকল কোণানুপাতগুলিই ধনাত্মক হইবে। সুতরাং, ঋণাত্মক চিহ্ন বাদ দিয়া

$$\sin 18° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$$
$$\cos 18° = +\sqrt{1 - \sin^2 18°} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})$$
$$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$$
$$\sin 36° = \sqrt{1 - \cos^2 36°} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

দ্রষ্টব্য : 54° এবং 72° যথাক্রমে 36° এবং 18°-র পূরক কোণ বলিয়া উপরোক্ত মানসমূহ হইতে আমরা 54° এবং 72°-র কোণানুপাতসমূহ নির্ণয় করিতে পারি।

9·9. 3° এবং উহার গুণিতক কোণগুলির কোণানুপাত :

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18°\cos 15° - \cos 18°\sin 15°$$
$$= \tfrac{1}{16}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \tfrac{1}{8}(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{5 + \sqrt{5}})$$

[$\sin 18°, \cos 15°, \cdots$ ইত্যাদির মান যথাযথ স্থানে বসাইলে]

অনুরূপভাবে,

$$\cos 3^\circ = \tfrac{1}{8}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5+\sqrt{5}}) + \tfrac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1).$$

3°, 15°, 18°, 30°, 36° এবং 45°-এর কোণানুপাতগুলি জানা থাকিলে আমরা 3°-এর গুণিতক যে-কোন কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করিতে পারি। যথা, $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$; $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$; $12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$; $21^\circ = 36^\circ - 15^\circ$; ইত্যাদি। 45° অপেক্ষা বৃহত্তর কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করিতে হইলে আমাদের 45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর পূরক কোণের সাহায্য গ্রহণ করিতে হইবে।

9·10. Ex. 1. *Show that*

$$\sin x = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}.$$

আমরা জানি, $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

অতএব, $\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}$

$\therefore$ $\sin\frac{x}{2^2} = 2\sin\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^3}$

. . . .

এইরূপে, $\sin\frac{x}{2^{n-1}} = 2\sin\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^n}.$

অতএব, $\sin x = 2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}.$

Ex. 2. *If* $\tan\frac{1}{2}\theta = \tan^3\frac{1}{2}\phi$ *and* $\tan\phi = 2\tan\alpha$, *show that*

$$\theta + \phi = 2\alpha.$$

$$\tan(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\phi) = \frac{\tan\frac{1}{2}\theta + \tan\frac{1}{2}\phi}{1-\tan\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}\phi} = \frac{\tan^3\frac{1}{2}\phi + \tan\frac{1}{2}\phi}{1-\tan^4\frac{1}{2}\phi}$$

$$= \frac{\tan\frac{1}{2}\phi\,(1+\tan^2\frac{1}{2}\phi)}{(1-\tan^2\frac{1}{2}\phi)(1+\tan^2\frac{1}{2}\phi)} = \frac{\tan\frac{1}{2}\phi}{1-\tan^2\frac{1}{2}\phi}$$

$$= \tfrac{1}{2}\tan\phi = \tan\alpha.$$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\phi = \alpha$

অর্থাৎ $\theta + \phi = 2\alpha.$

Ex. 3. *Prove that* $\sec\theta - \tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$.

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1 - \tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan\frac{\theta}{2}} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

Ex. 4. *Show that* $\frac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$.

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

Ex. 5. *If* $\tan\frac{A}{2} = t$, *prove that* $\sin A + \tan A = \frac{4t}{1-t^4}$.

$$\sin A + \tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}} + \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2}$$

$$= 2t\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right) = 2t\cdot\frac{2}{1-t^4} = \frac{4t}{1-t^4}.$$

Ex. 6. *If* $\cos\theta = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{1 - \cos\alpha\cos\beta}$, *prove that one of the values of* $\tan\frac{1}{2}\theta$ *is* $\tan\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta$.

$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{1 - \cos\alpha\cos\beta}.$$

$$\therefore\quad \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha+\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha-\cos\beta},$$

বা, $$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{(1+\cos\beta)-\cos\alpha\,(1+\cos\beta)}{(1-\cos\beta)+\cos\alpha\,(1-\cos\beta)}$$

$$= \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1-\cos\beta)(1+\cos\alpha)} = \frac{\tan^2\frac{1}{2}\alpha}{\tan^2\frac{1}{2}\beta},$$

বা, $\tan^2\frac{1}{2}\theta = \tan^2\frac{1}{2}\alpha\cot^2\frac{1}{2}\beta.$

এখন বর্গমূল লইলে, $\tan\frac{1}{2}\theta = \pm\tan\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta$,

সুতরাং, $\tan\frac{1}{2}\theta$-র একটি মান হইবে $\tan\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta$.

Ex. 7. *Show that* $16\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{14\pi}{15} = 1.$

বাম পক্ষ $= 16\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ\cos 168^\circ$
$= 4\,(2\cos 24^\circ\cos 96^\circ)(2\cos 48^\circ\cos 168^\circ)$
$= 4\,(\cos 60^\circ + \cos 36^\circ)(\cos 108^\circ + \cos 60^\circ)$
$= 4\,(\frac{1}{2} + \cos 36^\circ)(-\sin 18^\circ + \frac{1}{2})$
$= (1 + 2\cos 36^\circ)(1 - 2\sin 18^\circ).$

এক্ষণে আমরা জানি, $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ এবং $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
[অনুঃ 9·9 দ্রষ্টব্য]

সুতরাং, বাম পক্ষ $= \left(1 + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
$= \frac{1}{4}(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 1.$

Ex. 8. *If* $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, *and* α *lies between* 180° *and* 270°, *find the values of* $\sin\frac{1}{2}\alpha$ *and* $\cos\frac{1}{2}\alpha$.

$\sin\alpha = -\frac{4}{5}.\qquad \therefore\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \pm\frac{3}{5}.$

কিন্তু, যেহেতু α-কোণ 180° অপেক্ষা বৃহত্তর এবং 270° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অর্থাৎ যেহেতু α-কোণ তৃতীয় কক্ষে অবস্থিত, অতএব, $\cos\alpha$ ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore \quad \cos \alpha = -\frac{3}{5}. \quad \therefore \quad \cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = -\frac{3}{5},$

বা $\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{4}{5}$;

$\therefore \quad \sin \frac{1}{2}\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$

আবার, $\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 1 = -\frac{3}{5}. \quad \therefore \quad \cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{5}.$

$\therefore \quad \cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$

কিন্তু, যেহেতু $180° < \alpha < 270°, \quad \therefore \quad 90° < \frac{1}{2}\alpha < 135°.$

অর্থাৎ $\frac{1}{2}\alpha$-কোণ দ্বিতীয় কক্ষে অবস্থিত। অতএব, $\sin \frac{1}{2}\alpha$ ধনাত্মক এবং $\cos \frac{1}{2}\alpha$ ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore \quad \sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ এবং $\cos \frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$

Examples IX

Prove that (*Ex. 1 to 14*) :—

1. $\dfrac{1-\cos A}{\sin A} = \tan \dfrac{A}{2}.$ **2.** $\dfrac{1+\cos A}{\sin A} = \cot \dfrac{A}{2}.$

3. $\left(\sin \dfrac{A}{2} \pm \tan \dfrac{A}{2}\right)^2 = 1 \pm \sin A.$

4. $\sec \theta + \tan \theta = \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta\right).$ [C. U. 1939]

5. (i) $\dfrac{1+\sin\theta - \cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \tan \dfrac{\theta}{2}.$

(ii) $\dfrac{\sin \frac{1}{2}\alpha - \sqrt{1+\sin\alpha}}{\cos \frac{1}{2}\alpha - \sqrt{1+\sin\alpha}} = \cot \dfrac{\alpha}{2}$ where $0 < \alpha < \pi$,

and the square root is taken with positive sign.

6. (i) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{2}\right).$

(ii) $\dfrac{2\sin\theta - \sin 2\theta}{2\sin\theta + \sin 2\theta} = \tan^2 \frac{1}{2}\theta.$

7. (i) $\dfrac{1+\tan \frac{1}{2}A}{1-\tan\frac{1}{2}A} = \dfrac{1+\sin A}{\cos A}.$

(ii) $\cot \beta = \frac{1}{2}\left(\cot \frac{1}{2}\beta - \tan \frac{1}{2}\beta\right).$

8. (i) $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot$

(ii) $8\sin^4\frac{1}{2}\theta-8\sin^2\frac{1}{2}\theta+1=\cos 2\theta.$

9. $\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}.$ **10.** $\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}.$

11. $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=4\cos^2\frac{1}{2}(x-y).$

12. $\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=1.$

13. $\tan 7\frac{1}{2}^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$

14. $2\cos\frac{1}{16}\pi=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$

15. (i) If $\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\cdot\tan\dfrac{\phi}{2}$, show that

$$\cos\phi=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}.$$

(ii) If $\tan\theta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, show that one of the values of $\tan\frac{1}{2}\theta$ is $\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta$.

16. If $\sin\alpha+\sin\beta=a$ and $\cos\alpha+\cos\beta=b$, find the value of $\cos(\alpha+\beta)$.

17. (i) Prove that $2\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$, and determine which are the correct signs when $270^\circ>A>180^\circ$.
[B. H. U. I., 1931]

(ii) If $\theta=240^\circ$, is the following statement correct ?

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta=\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}.$$

If not, how must it be modified ?

18. If $A=320^\circ$, prove that

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

ANSWERS

16. $\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$ 17. (i) $2\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}.$

(ii) No ; $2\sin\frac{1}{2}\theta=\sqrt{1+\sin\theta}+\sqrt{1-\sin\theta}.$

দশম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অভেদ

10·1. তিন বা ততোধিক কোণের মধ্যে কোন সম্পর্ক বিদ্যমান থাকিলে, উহাদের কোণানুপাত-সম্বলিত বহু কৌতূহলোদ্দীপক অভেদ প্রমাণ করা যাইতে পারে। ইহাদের মধ্যে যে সকল ক্ষেত্রে তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান, সেই সমস্ত অভেদগুলি উল্লেখযোগ্য। শেষোক্ত ক্ষেত্রে অভেদগুলি প্রমাণ করিতে হইলে পূরক বা সম্পূরক কোণের কোণানুপাতগুলির ধর্ম প্রায় প্রতি ক্ষেত্রেই ব্যবহার করিতে হইবে।

যথা, $A+B+C=\pi$ হইলে, $B+C=\pi-A$.

সুতরাং, $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$.

অনুরূপভাবে, $\sin(C+A)=\sin B$; $\sin(A+B)=\sin C$.

পুনরায়, $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$.

অনুরূপভাবে, $\cos(C+A)=-\cos B$; $\cos(A+B)=-\cos C$.

পুনরায়, $\tan(B+C)=\tan(\pi-A)=-\tan A$.

অনুরূপভাবে, $\tan(C+A)=-\tan B$; $\tan(A+B)=-\tan C$.

পুনরায়, $A+B+C=\pi$ হইলে, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$;

সুতরাং, $\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$.

অনুরূপভাবে, $\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$; $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$.

পুনরায়, $\tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cot\frac{A}{2}$

এইরূপে, $\tan\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)=\cot\frac{B}{2}$; $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$.

10·2. Ex. 1. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

[C. U. 1931, '33, '35]

বাম পক্ষ $= (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C$
$= 2 \sin (A+B) \cos (A-B) + 2 \sin C \cos C$
$= 2 \sin C \cos (A-B) - 2 \sin C \cos (A+B)$
$[\because \; A+B+C=\pi]$
$= 2 \sin C [\cos (A-B) - \cos (A+B)]$
$= 2 \sin C . 2 \sin A \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C.$

Ex. 2. If $A+B+C=\pi$, prove that
$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C - 1.$

বাম পক্ষ $= (\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2C$
$= 2 \cos (A+B) \cos (A-B) + 2 \cos^2 C - 1$
$= -2 \cos C \cos (A-B) - 2 \cos C \cos (A+B) - 1$
$[\because \; A+B+C=\pi]$
$= -2 \cos C [\cos (A-B) + \cos (A+B)] - 1$
$= -2 \cos C . 2 \cos A \cos B - 1$
$= -4 \cos A \cos B \cos C - 1.$

Ex. 3. If $A+B+C=\pi$, prove that
$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$
[C. U. 1910, '29]

বাম পক্ষ $= (\sin A + \sin B) + \sin C$
$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$
$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2}$$
$$\left[\because \; \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= 2 \cos \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2}\right]$$
$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Ex. 4. If $A+B+C=\pi$, prove that
$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

বাম পক্ষ $= (\cos A + \cos B) + \cos C$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2} + 1$$

$$\left[\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1 = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1.$$

Ex. 5. If $A+B+C=\pi$, prove that
$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

যেহেতু, $A+B+C=\pi$, $\therefore$ $B+C=\pi-A$;

$\therefore$ $\tan(B+C)=\tan(\pi-A)$

বা, $\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C} = -\tan A$

অর্থাৎ, $\tan B+\tan C = -\tan A(1-\tan B\tan C)$
$= -\tan A + \tan A\tan B\tan C.$

$\therefore$ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$;

বিকল্প প্রমাণ : $\tan(A+B+C)=\tan\pi=0.$

$\therefore$ $\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}=0$

কিন্তু, কোন ভগ্নাংশের মান শূন্য হইলে, ইহার লব নিশ্চয়ই শূন্য হইবে।

সুতরাং, $\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C=0$,

অর্থাৎ, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

Ex. 6. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$$

[C. U. 1936, '39]

যেহেতু, $A+B+C=\pi$, $\therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore\quad \tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right);$$

$$\therefore\quad \frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=\cot\frac{A}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$$

বা, $\tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

বা, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

পক্ষান্তর করিয়া নির্ণেয় অভেদটি পাইব।

বিকল্প প্রমাণ :

যেহেতু, $A+B+C=\pi$. $\therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore\quad \cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{\pi}{2}=0$$

অর্থাৎ, $\frac{1}{\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}=0$

$$\therefore\quad \frac{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=0$$

যেহেতু ভগ্নাংশটির মান শূন্য, সুতরাং ইহার লব = 0.

$$\therefore\quad 1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=0.$$

Ex. 7. If $A+B+C=\pi$, prove that

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

ডান পক্ষ $=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left[2\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\right]$

$$= 2\cos\frac{\pi - A}{4}\left[\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4} + \cos\frac{B-C}{4}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\pi - A}{4}\left[\cos\frac{\pi + A}{4} + \cos\frac{B-C}{4}\right]$$

[$\because 2\pi - (B+C) = \pi + \{\pi - (B+C)\} = \pi + A$, কারণ, $A+B+C=\pi$]

$$= 2\cos\frac{\pi - A}{4}\cos\frac{\pi + A}{4} + 2\cos\frac{\pi - A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

[$\because A+B+C=\pi$]

$$= \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}.$$

দ্রষ্টব্য :

যেহেতু, $\cos\frac{1}{4}(\pi - A) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left(\pi - A\right)\right\} = \sin\frac{\pi + A}{4}$

এবং, $\cos\frac{1}{4}(\pi - A) = \cos\frac{1}{4}(A+B+C-A) = \cos\frac{B+C}{4}$,

$\therefore \quad \cos\frac{1}{2}A + \cos\frac{1}{2}B + \cos\frac{1}{2}C$

$$= 4\sin\tfrac{1}{4}(\pi + A)\sin\tfrac{1}{4}(\pi + B)\sin\tfrac{1}{4}(\pi + C)$$

$$= 4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$$

Ex. 8. If $A+B+C=\pi$, prove that
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1.$

[C. U. 1932, '37, '47]

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \tfrac{1}{2}(2\cos^2 A + 2\cos^2 B) + \cos^2 C$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$$
$$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos C.\cos C$$
$$= 1 - \cos C\cos(A-B) - \cos C.\cos(A+B),$$

[$\because A+B=\pi - C$]

$$= 1 - \cos C\,[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$
$$= 1 - \cos C\,.\,2\cos A\cos B = 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$$

পক্ষান্তর করিলে, নির্ণেয় অভেদ পাওয়া যাইবে।

Ex. 9. *Show that* $\tan(\beta - \gamma) + \tan(\gamma - \alpha) + \tan(\alpha - \beta)$
$$= \tan(\beta - \gamma)\tan(\gamma - \alpha)\tan(\alpha - \beta).$$

মনে করি, $A = \beta - \gamma$, $B = \gamma - \alpha$, $C = \alpha - \beta$.

অতএব, $A + B + C = \beta - \gamma + \gamma - \alpha + \alpha - \beta = 0.$

$\therefore\ \tan(A + B + C) = \tan 0 = 0.$

$\therefore\ \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C.$

এক্ষণে A, B ও C-এর নির্দিষ্ট মান বসাইলে উপরোক্ত অভেদটি প্রমাণিত হইবে।

Ex. 10. *If* $x + y + z = xyz$, *prove that*
$$x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) = 4xyz.$$

প্রদত্ত অভেদে, $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$, $z = \tan\gamma$ কল্পনা করিলে,
$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

পক্ষান্তর করিলে, $\tan\alpha(1 - \tan\beta\tan\gamma) = -(\tan\beta + \tan\gamma)$;

অর্থাৎ, $\tan\alpha = -\dfrac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma} = -\tan(\beta + \gamma),$

$\therefore\ \alpha = \pi - (\beta + \gamma)$ অর্থাৎ, $\alpha + \beta + \gamma = \pi.$

$\therefore\ \tan(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = \tan 2\pi = 0.$

সুতরাং, $\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha\tan 2\beta\tan 2\gamma,$

বা, $\dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} + \dfrac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} + \dfrac{2\tan\gamma}{1 - \tan^2\gamma}$
$$= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\gamma}\cdot\frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\gamma}\cdot\frac{2\tan\gamma}{1 - \tan^2\gamma}.$$

অতএব, $\tan\alpha$, $\tan\beta$ ও $\tan\gamma$-এর স্থানে যথাক্রমে x, y ও z বসাইলে, আমরা নিম্নোক্ত অভেদটি পাই ;

$$\frac{2x}{1 - x^2} + \frac{2y}{1 - y^2} + \frac{2z}{1 - z^2} = \frac{2x}{1 - x^2}\cdot\frac{2y}{1 - y^2}\cdot\frac{2z}{1 - z^2}.$$

ইহাকে সরল করিলে, আমাদের উদ্দিষ্ট অভেদটি প্রমাণিত হয়।

Examples X

If $A+B+C=\pi$, prove that (Ex. 1 to 16) :—

1. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

2. $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$.

3. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

4. $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$.

5. $(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)(\cot A+\cot B)$

$$=\operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C.$$

6. $\frac{\cot B+\cot C}{\tan B+\tan C}+\frac{\cot C+\cot A}{\tan C+\tan A}+\frac{\cot A+\cot B}{\tan A+\tan B}=1$.

7. $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

$$=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$

$$=1+4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}.$$

8. $\cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C$

$$=1+2\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$$

9. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

10. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

11. $\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$.

[C. U. 1949]

12. $\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

13. $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$

$$=4\sin A\sin B\sin C.$$

14. $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$

$$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

15. $\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C=\sin^2 C$.

৮

16. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=\sin A+\sin B+\sin C.$

17. If $\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}\pi$, prove that

(i) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1.$

[C. U. 1943]

(ii) $\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta=1.$

18. If A, B, C, D are the angles of a quadrilateral, prove that

(i) $\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\cot A+\cot B+\cot C+\cot D}$

$=\tan A\tan B\tan C\tan D.$

(ii) $\cos A+\cos B+\cot C+\cos D$

$=4\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(C+A).$

19. Show that

(i) $\cos^2(\beta-\gamma)+\cos^2(\gamma-\alpha)+\cos^2(\alpha-\beta)$

$=1+2\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)\cos(\alpha-\beta).$

(ii) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta).$

(iii) $\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$

is independent of θ.

20. (i) If $\alpha+\beta=\gamma$, show that

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

[C. U. 1940]

(ii) If $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, show that

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$

21. If $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$, show that $\cot A\cot B\cot C=\cot D.$

22. If $A+B+C=2S$, prove that

(i) $\sin(S-A)+\sin(S-B)+\sin(S-C)-\sin S$

$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

(ii) $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C-1$

$=4\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C).$

23. If $A+B+C=n\pi$ (n being zero or an integer), show that

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

24. Show that, if $\alpha+\beta+\gamma=\pi$,

$$\tan(\beta+\gamma-\alpha)+\tan(\gamma+\alpha-\beta)+\tan(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$=\tan(\beta+\gamma-\alpha)\tan(\gamma+\alpha-\beta)\tan(\alpha+\beta-\gamma).$$

25. If $A+B+C=\pi$, prove that

(i) $\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$
$$+\sin C\cos A\cos B=\sin A\sin B\sin C.$$

(ii) $\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A$
$$+\cos C\sin A\sin B=1+\cos A\cos B\cos C.$$

(iii) $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C$
$$=4\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}\cos\frac{5C}{2}.$$

(iv) $(\tan A+\tan B+\tan C)(\cot A+\cot B+\cot C)$
$$=1+\sec A\sec B\sec C.$$

26. If $\cos A+\cos B+\cos C=0$, show that

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=12\cos A\cos B\cos C.$$

[Write $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$, *etc.*]

27. If $x+y+z=\frac{1}{2}\pi$, prove that

$$\cos(x-y-z)+\cos(y-z-x)+\cos(z-x-y)$$
$$-4\cos x\cos y\cos z=0.$$

28. Show that

$$\sin(y-z)+\sin(z-x)+\sin(x-y)$$
$$+4\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{x-y}{2}=0.$$

29. If $x+y+z=0$, show that

$$\cot(z+x-y)\cot(x+y-z)+\cot(x+y-z)\cot(y+z-x)$$
$$+\cot(y+z-x)\cot(z+x-y)=1.$$

30. If $x+y+z=xyz$, prove that

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

একাদশ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ এবং সাধারণ মান

(Trigonometrical Equations and General Values)

11·1. পঞ্চম অধ্যায় হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হইবে যে, কোন কোণানুপাতের মান দেওয়া থাকিলে সংশ্লিষ্ট কোণের পরিমাপ একটিমাত্র মানে সীমাবদ্ধ থাকিবে না ; উহার সংখ্যা হইবে অগণিত। যেমন, $\sin\theta=\frac{1}{2}$ হইলে, θ-র একটি মান (লঘিষ্ঠ ধনাত্মক মান) হইবে $30°$; এক্ষণে সম্পূরক কোণের সাইন অভিন্ন থাকার দরুণ, $\sin 150°=\sin 30°=\frac{1}{2}$; পুনরায় যে সকল কোণ এবং $30°$ বা $150°$-এর অন্তর $360°$-এর অখণ্ড গুণিতক হইবে, সেই সমস্ত কোণের সাইন (বস্তুতঃ, সকল কোণানুপাত) অভিন্ন হইবে। অতএব, $30°$, $150°, 390°, 510°$ ইত্যাদি এবং $-330°, -210°$ প্রভৃতি প্রত্যেকটি কোণের সাইন অভিন্ন এবং '$\frac{1}{2}$'-এর সমান হইবে। অনুরূপভাবে, $\cos\theta$-র মান $\frac{1}{\sqrt{2}}$ দেওয়া থাকিলে, θ-র মান $+45°, +315°, +405°, -315°, -45°, \ldots\ldots$ ইত্যাদির মধ্যে যে-কোন একটির সমান হইতে পারে। পুনরায়, $\tan\theta=\sqrt{3}$ হইলে, θ-র মান $60°, 240°, 420°, -300°$ ইত্যাদির মধ্যে যে-কোন একটির সমান হইতে পারে।

11·2. কোন একটি কোণানুপাত শূন্য হইলে, কোণগুলির সাধারণ মান নির্ণয় (General Expression of all angles, one of whose trigonometrical ratios is zero) :

যে সমস্ত কোণগুলির সাইন শূন্যের সমান হইবে, সংজ্ঞানুসারে সেই সমস্ত কোণগুলির যে-কোন একটি বাহুর উপর অবস্থিত যে-কোন একটি বিন্দু হইতে অপর বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য শূন্য হইবে, অর্থাৎ কোণগুলির দুইটি বাহু পরস্পর মিলিয়া যাইবে। অতএব, এই সকল কোণগুলি π-এর যুগ্ম বা অযুগ্ম যে-কোন গুণিতক হইতে পারে।

অতএব, $\sin\theta=0$ হইলে, আমরা লিখিতে পারি যে, $\theta=n\pi$, যেখানে n, অখণ্ড ধন বা ঋণসংখ্যা বা শূন্যের সমান হইবে।

যে সমস্ত কোণগুলির কোসাইন শূন্যের সমান, সেই সমস্ত কোণগুলির একটি বাহুর উপরিস্থিত অপর বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য শূন্যের সমান হইবে অর্থাৎ কোণগুলির দুইটি বাহু পরস্পর লম্ব হইবে। অতএব, কোণগুলির মান $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{3\pi}{2}$ হইবে, অথবা $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{3\pi}{2}$ হইতে তাহাদের অন্তর 2π-এর যুগ্ম বা অযুগ্ম গুণিতক হইবে। অর্থাৎ, কোণগুলি $\frac{\pi}{2}$-এর অযুগ্ম গুণিতক হইবে।

সুতরাং, $\cos\theta = \mathbf{0}$ হইলে, $\theta = (\mathbf{2n+1})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ হইবে, n সর্বদাই শূন্য অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইবে।

পুনরায়, $\mathbf{tan}\,\theta = \mathbf{0}$ হইলে, উহার লব $= \sin\theta = 0$. অতএব, $\theta = \mathbf{n\pi}$.

অনুরূপভাবে, $\mathbf{cot}\,\theta = \mathbf{0}$ হইলে, $\mathbf{cos}\,\theta = \mathbf{0}$. সুতরাং, $\theta = (\mathbf{2n+1})\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$.

দ্রষ্টব্য : $\operatorname{cosec}\theta$ অথবা $\sec\theta$ কখনও শূন্য হইতে পারে না, কারণ ইহাদের আঙ্কিক মান একক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হওয়া অসম্ভব।

11·3. যে সকল কোণের সাইন (বা কোসেকাণ্ট) সমান, তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় (General expressions of angles having the same sine or cosecant) :

মনে করি, α একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোণ এবং $\sin\alpha$ একটি প্রদত্ত রাশি (রাশিটির আঙ্কিক মান একক অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারিবে না) k-এর সমান। ব্যবহারিক সুবিধার জন্য সাধারণতঃ যে ক্ষুদ্রতম কোণের সাইন k-এর সমান, তাহাই α হিসাবে ধরা হয়। এখন, মনে করি θ অপর একটি কোণ, যাহার সাইন k-এর সমান।

অতএব, $\sin\theta = \sin\alpha$ বা, $\sin\theta - \sin\alpha = 0$,

বা, $2\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha) = 0$.

সুতরাং, $\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha) = 0$ বা, $\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha) = 0$.

$\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha) = 0$ হইলে,

$\frac{1}{2}(\theta-\alpha) = \pi$-এর যুগ্ম বা অযুগ্ম গুণিতক $= m\pi$ $\cdots$ (1)

$\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha) = 0$ হইলে,

$\frac{1}{2}(\theta+\alpha) = \frac{\pi}{2}$-এর অযুগ্ম গুণিতক $= (2m+1)\frac{\pi}{2}$ $\cdots$ (2)

(1) হইতে আমরা জানি,

$$\theta - \alpha = 2m\pi\ ; \qquad \therefore\ \theta = \alpha + 2m\pi \qquad \cdots (3)$$

(2) হইতে আমরা জানি,

$$\theta + \alpha = (2m+1)\pi\ ;\ \therefore\ \theta = -\alpha + (2m+1)\pi \quad \cdots (4)$$

(3) ও (4) হইতে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হই যে,

$$\theta = (-1)^n \alpha + n\pi, \qquad \cdots \qquad \cdots (5)$$

যেখানে n শূন্য অথবা যুগ্ম বা অযুগ্ম ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যার সমান।

$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ হইলে, $\sin\theta = \sin\alpha$; অতএব, যে সমস্ত কোণের কোসেকাণ্ট α-র কোসেকাণ্টের সমান, সে সমস্ত কোণের সাধারণ মানও (5)-এর সাহায্যে নির্ণয় করা যাইবে।

সুতরাং, যে সমস্ত কোণের সাইন বা কোসেকাণ্টের মান যথাক্রমে α-র সাইন বা কোসেকাণ্টের মানের সহিত সমান, সেই সমস্ত কোণের মান

$$2n\pi + \alpha \qquad \text{বা,}\quad (2n+1)\pi - \alpha,$$

অথবা, $\mathbf{n\pi + (-1)^n \alpha}$.

(n সর্বদাই শূন্য অথবা কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।)

11·4. যে সকল কোণের কোসাইন (বা সেকাণ্ট) সমান, তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় (General expression of angles having the same cosine or secant) :

মনে করি, α ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার কোসাইন প্রদত্ত রাশি k (যাহার আঙ্কিক মান $\not> 1$)-র সমান ; এবং মনে করি θ এমন একটি কোণ যাহার কোসাইন k-র সমান।

অতএব, $\cos\theta = \cos\alpha$ বা, $\cos\alpha - \cos\theta = 0$.

বা, $2\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha) = 0$.

সুতরাং, $\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha) = 0$, বা, $\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha) = 0$.

$\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha) = 0$ হইলে, $\frac{1}{2}(\theta+\alpha) = \pi$-এর যে-কোন অখণ্ড গুণিতক $= n\pi$ $\cdots (1)$

$\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha) = 0$ হইলে, $\frac{1}{2}(\theta-\alpha) = \pi$-এর যে-কোন অখণ্ড গুণিতক $= n\pi$ $\cdots (2)$

(1) হইতে জানা যায় যে, $\theta+\alpha=2n\pi$; $\therefore\ \theta=2n\pi-\alpha \cdots (3)$

(2) " " " ", $\theta-\alpha=2n\pi$; $\therefore\ \theta=2n\pi+\alpha \cdots (4)$

অতএব, (3) এবং (4) একত্র করিলে, $\theta=2n\pi\pm\alpha \cdots (5)$,

(n একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা বা শূন্য)।

পূর্ব অনুচ্ছেদের অনুরূপ কারণে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, যে সমস্ত কোণের সেকাণ্ট α-র সেকাণ্টের সমান, তাহাদের সাধারণ মানও (5)-এর সাহায্যে নির্ণীত হইবে।

অতএব, যে সমস্ত কোণের কোসাইন বা সেকাণ্ট যথাক্রমে α-র কোসাইন বা সেকাণ্টের সমান হইবে, তাহাদের সাধারণ মান

$$2n\pi\pm\alpha.$$

(n একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা, বা শূন্য।)

দ্রষ্টব্য : 11·3 অনুচ্ছেদের ন্যায় এখানেও α ধনাত্মক ক্ষুদ্রতম কোণ কল্পনা না করিয়া যদি মনে করি α যে-কোন কোণ যাহার কোসাইন প্রদত্ত রাশি k-র সমান, তাহা হইলেও $\cos\theta=\cos\alpha$ সমীকরণে θ-র পূর্বোক্ত সমাধানগুলির কোন ব্যতিক্রম হইবে না।

11·5. যে সকল কোণের ট্যানজেণ্ট (বা কোট্যানজেণ্ট) সমান, তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় (General expression of angles having the same tangent or cotangent) :

মনে করি, α ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার ট্যানজেণ্ট প্রদত্ত রাশি k-র সমান ; এবং θ, যে-কোন কোণ যাহার ট্যানজেণ্ট k-র সমান।

অতএব, $\tan\theta=\tan\alpha$, বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$,

বা, $\dfrac{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}=0$, বা, $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}=0$.

$\therefore\quad \sin(\theta-\alpha)=0.$

অতএব, $\theta-\alpha=\pi$ এর যে-কোন গুণিতক $=n\pi$; $\therefore\ \theta=n\pi+\alpha \cdots (1)$

অপর উৎপাদক $\dfrac{1}{\cos\theta\cos\alpha}$ কখনই শূন্য হইতে পারে না, কারণ, কোসাইনের আঙ্কিক মান কখনও সীমাহীন বৃহৎ রাশি হইতে পারে না।

পূর্বোক্ত ক্ষেত্রগুলির ন্যায় এক্ষেত্রেও, যে সকল কোণের কোট্যানজেণ্ট

α-কোণের কোট্যানজেণ্টের সমান, তাহাদের সাধারণ মানও (1)-দ্বারা নির্ণীত হইবে।

অতএব, যে সমস্ত কোণের ট্যানজেণ্ট বা কোট্যানজেণ্ট যথাক্রমে α-কোণের ট্যানজেণ্ট বা কোট্যানজেণ্টের সমান, তাহাদের সাধারণ মান $n\pi+\alpha$.
(n যে-কোন একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা, অথবা শূন্য।)

11·6. বিশেষ নিয়মাবলী (Special Cases) :

11·3 অনুচ্ছেদ হইতে প্রমাণ করা যায় যে, n যুগ্ম বা অযুগ্ম যাহাই হউক না কেন,

$$\sin\theta=1=\sin\frac{\pi}{2} \text{ হইলে}, \quad \theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}=(4n+1)\frac{\pi}{2}$$

এবং $$\sin\theta=-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ হইলে}, \quad \theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}=(4n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{বা}, \quad =(4k+3)\frac{\pi}{2},$$

[n (বা $k=n-1$) কোন অখণ্ড ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা বা শূন্য।]

অনুরূপভাবে, 11·4 অনুচ্ছেদ হইতে প্রমাণ করা যাইবে যে,

$$\cos\theta=1 \text{ হইলে}, \quad \theta=2n\pi$$

$$\cos\theta=-1 \text{ হইলে}, \quad \theta=(2n+1)\pi.$$

[n শূন্য অথবা যে-কোন অখণ্ড ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা।]

উপরোক্ত কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে θ-এর এই সকল মানই সর্বদা ব্যবহৃত হয়।

11·7. জ্যামিতিক আলোচনা (Geometrical Treatment) :

(i) নির্দিষ্ট সাইন (বা কোসেকাণ্ট) বিশিষ্ট কোণ অঙ্কন এবং এই সকল কোণের সাধারণ মান নির্ণয় :

মনে করি যে এমন একটি কোণ আঁকিতে হইবে যাহার sine প্রদত্ত রাশি 'a'-র সমান।

XOX′, YOY′ যে-কোন দুইটি লম্বরেখাকে অক্ষরেখারূপে গ্রহণ করিয়া O-কেন্দ্র এবং একক দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল।

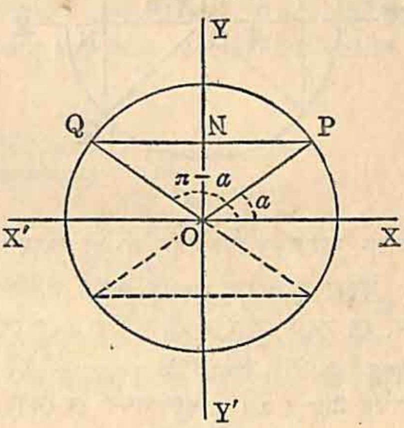
OY হইতে ON রেখা 'a'-এর সমান করিয়া কাটিয়া লওয়া হইল।

['a' ঋণসংখ্যা হইলে OY′ হইতে কাটিতে হইবে]। N বিন্দুর মধ্য দিয়া

PNQ রেখা XOX′-এর সহিত সমান্তরাল করিয়া টানা হইলে, উহা পরিধিকে P এবং Q-তে ছেদ করিল।

এক্ষণে $\angle POX = \alpha$ কল্পনা করিলে, α একটি উদ্দিষ্ট কোণ হইবে। কারণ, $\sin\alpha = \sin OPN = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{1} = a.$

চিত্র হইতে দেখা যায় যে, অপর কোণ, যাহার সাইন 'a'-এর সমান, তাহার মান $(\pi-\alpha)$-র সমান হইবে [অথবা $a = ON$ ঋণরাশি হইলে, অপর কোণের কোণের মান $(3\pi-\alpha)$-র সমান হইবে এবং ইহার ত্রিকোণমিতিক মান $(\pi-\alpha)$-র সমান]।



সুতরাং, 'a'-এর মান (<1) ও চিহ্ন নির্দিষ্ট হইলে, YOY′-এর উপর N-এর অবস্থানও নির্দিষ্ট হইবে। অতএব, একটি পূর্ণ আবর্তনের মধ্যে (অর্থাৎ 0 এবং 2π-এর মধ্যে) কেবলমাত্র দুইটি কোণ, α এবং $(\pi-\alpha)$-র সাইন নির্দিষ্ট রাশির সমান হইবে।*

এক্ষণে, 2π-এর কোনও গুণিতক যোগ বা বিয়োগ করিলে যে-কোন কোণের কোণানুপাতগুলি অপরিবর্তিত থাকে। [অনু. 5·10]

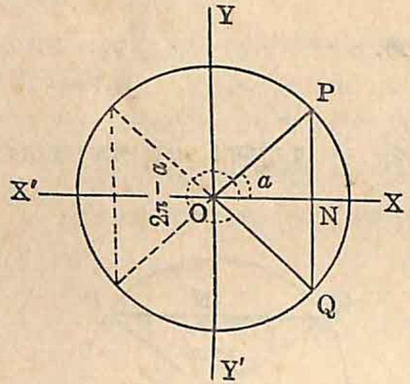
সুতরাং, যে সমস্ত কোণের সাইন α-কোণের সাইনের সমান, তাহারা $2m\pi+\alpha$ অথবা $2m\pi+\pi-\alpha$ (m শূন্য বা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)—এই দুইটি শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত হইবে। উভয় শ্রেণীর কোণগুলিকে সংক্ষেপে $\mathbf{n\pi+(-1)^n\alpha}$, এই সূত্রের অন্তর্ভুক্ত করা যাইতে পারে ; (এখানে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা)।

(ii) নির্দিষ্ট কোসাইন (বা সেকাণ্ট)-বিশিষ্ট কোণসমূহ :

মনে করি, প্রদত্ত কোসাইন 'a'-এর সমান। পূর্বের ন্যায় OX হইতে

* সমপ্রান্তিক (coterminal) না হইলে, একই সাইন-বিশিষ্ট দুইটি পৃথক কোণ একই পাদে অবস্থিত হইতে পারে না, কারণ সেক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

'a'-এর সমান করিয়া ON কাটিয়া লওয়া হইল ('a' ঋণসংখ্যা হইলে পূর্বের ন্যায় OX′ হইতে কাটিতে হইবে)। PNQ সরলরেখা YOY′-এর সমান্তরাল করিয়া টানা হইল; উহা O-কেন্দ্র এবং একক ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধিকে P এবং Q-তে ছেদ করিল।

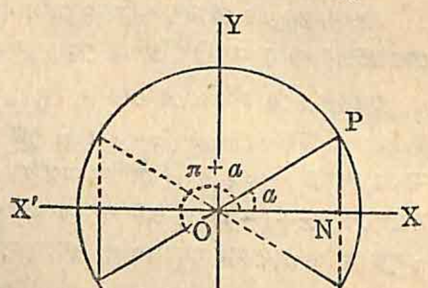


মনে করি, $\angle POX=\alpha$; তাহা হইলে α একটি উদ্দিষ্ট কোণ হইবে। আবার চিত্র হইতে লক্ষ্য করা যায় যে, প্রথম চারিটি পাদের অন্তর্ভুক্ত কেবল মাত্র দুইটি কোণ α, $2\pi-\alpha$ আছে, যাহাদের কোসাইন 'a'-এর সমান।

ইহাদের সহিত 2π-এর অখণ্ড গুণিতক যোগ বা বিয়োগ করিলে দেখা যায় যে, যে সমস্ত কোণের কোসাইন α-কোণের কোসাইনের সমান, তাহাদের মান $2m\pi+\alpha$ এবং $2m\pi+2\pi-\alpha$,—এই দুই শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত। পুনরায়, উভয় শ্রেণীই $2n\pi\pm\alpha$ (n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) —এই সূত্র-দ্বারা নির্ণীত হইবে।

(iii) নির্দিষ্ট ট্যানজেণ্ট বা কোট্যানজেণ্ট বিশিষ্ট কোণসমূহ :

মনে করি, নির্দ্দিষ্ট ট্যানজেণ্টের মান 'a'. OX বা OX′ হইতে একক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ON কাটিয়া লওয়া হইল। ON-এর সহিত লম্বরেখা NP হইতে 'a'-এর সমান করিয়া NP কাটিয়া লওয়া হইল। 'a' ধনরাশি হইলে ON এবং NP, উভয়েই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক রাশি হইবে; সুতরাং, $\angle XOP$ প্রথম অথবা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে; কিন্তু 'a' ঋণরাশি হইলে $\angle XOP$ দ্বিতীয় অথবা চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইবে।



সুতরাং, চিত্র হইতে ইহা সহজেই বুঝা যায় যে, 0 এবং 2π-এর মধ্যে নির্দিষ্ট কেবলমাত্র দুইটি কোণই বিদ্যমান।*

চিত্র হইতে ইহা স্পষ্টই বুঝা যায় যে, দুইটি কোণের মধ্যে একটি α হইলে, অপরটি নিশ্চয়ই $\pi+\alpha$ হইবে। 2π-এর যে-কোন গুণিতক যোগ বা বিয়োগ করিলে দেখা যায় যে, যে সমস্ত কোণের ট্যানজেন্ট α-কোণের ট্যানজেন্টের সমান, সে সমস্ত কোণ $2m\pi+\alpha$ এবং $2m\pi+(\pi+\alpha)$—এই দুইটি সূত্রের সাহায্যে নির্ণীত হইবে। উভয় শ্রেণীকেই $n\pi+\alpha$ —এই সূত্রের অন্তর্ভুক্ত করা যায়, এখানে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

11·8. Ex. 1. *Solve* $2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$2\cos 2\theta=1;\quad \therefore\ \cos 2\theta=\tfrac{1}{2}=\cos\tfrac{1}{3}\pi.$$

$$\therefore\ 2\theta=2n\pi\pm\tfrac{1}{3}\pi;\quad \therefore\ \theta=n\pi\pm\tfrac{1}{6}\pi.$$

দ্রষ্টব্যঃ ইহা লক্ষণীয় বিষয় যে, একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বিভিন্ন নিয়মে সমাধান করা যায়; এবং সমাধানের আকৃতি ভিন্ন হইলেও ইহা হইতে একই শ্রেণীর কোণই পাওয়া যাইবে। দৃষ্টান্তস্বরূপ উপরোক্ত উদাহরণটি একটি ভিন্ন নিয়মে করা হইল ঃ

প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নলিখিত-রূপেও লেখা যায় ঃ

$$2(\cos^2\theta-1+\cos^2\theta)=1,\quad \text{বা}\quad 4\cos^2\theta=3;$$

$$\therefore\ \cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6},\quad \text{বা}\quad \cos\frac{5\pi}{6};$$

$$\therefore\ \theta=2m\pi\pm\frac{\pi}{6},\quad \text{বা}\quad 2m\pi\pm\frac{5\pi}{6}.$$

এক্ষণে, $2m\pi\pm\frac{5\pi}{6}=(2m+1)\pi-\frac{\pi}{6}$, বা, $(2m-1)\pi+\frac{\pi}{6}$.

n অখণ্ড ধনরাশি হইলে, উপরোক্ত চারিটি শ্রেণীকেই $(n\pi\pm\frac{1}{6}\pi)$-সূত্রের অন্তর্ভুক্ত করা যায়, এবং শেষোক্ত সূত্রটি পূর্বেই নির্ণীত হইয়াছে।

---

* PN : ON অনুপাতটি নির্দিষ্ট এবং ইহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ PNO সমকোণ বলিয়া, PNO ত্রিভুজটি সর্বদাই নিজের সহিত সদৃশ হইবে; অতএব একই পাদে অবস্থিত ∠PON সকল ক্ষেত্রেই নির্দিষ্ট থাকিবে।

Ex. 2. *Solve* $4\cos^2 x + 6\sin^2 x = 5.$

এই সমীকরণটিকে আমরা লিখিতে পারি

$$4\cos^2 x + 6\sin^2 x = 5(\cos^2 x + \sin^2 x),$$

বা, $\sin^2 x = \cos^2 x$, বা, $\tan^2 x = 1$;

$\therefore \quad \tan x = \pm 1 = \tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

সুতরাং, $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}\cdot$

দ্রষ্টব্য : $a\cos^2 x + b\sin^2 x = c$, —এই ধরণের সমীকরণের সমাধান উপরোক্ত নিয়মে অথবা সাইনকে কোসাইনে বা কোসাইনকে সাইনে রূপান্তরিত করিয়া সমাধান করা যায়।

Ex. 3. *Solve* $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$ [C. U. 1940]

প্রদত্ত সমীকরণটিকে আমরা লিখিতে পারি যে,

$2(1-\sin^2 x) - \sin^2 2x = 0$ বা, $2\cos^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x = 0$

বা, $2\cos^2 x(1-2\sin^2 x) = 0$ বা, $\cos^2 x\cos 2x = 0$;

সুতরাং, $\cos x = 0$ বা, $\cos 2x = 0.$

$\cos x = 0$ সমীকরণ হইতে, $x = n\pi + \frac{1}{2}\pi$

$\cos 2x = 0$, " " , $2x = 2n\pi \pm \frac{1}{2}\pi$, $\therefore \; x = n\pi \pm \frac{1}{4}\pi.$

Ex. 4. *Solve* $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

প্রদত্ত সমীকরণটির উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2}$ অর্থাৎ $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করিলে দেখা যায়,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2},$$

বা, $\cos\theta\,.\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\,.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\cdot$

$\therefore \; \theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\cdot$ $\qquad \therefore \; \theta = 2n\pi + \frac{1}{12}\pi,\; 2n\pi - \frac{7\pi}{12}\cdot$

দ্রষ্টব্য : বহিরাগত সমাধান (Extraneous solution) : প্রথম উদাহরণে দেখানো হইয়াছে যে, একটি সমীকরণ বিভিন্ন নিয়মে সমাধান করা যায় ; কোন কোন ক্ষেত্রে সমাধানগুলি আপাতদৃষ্টিতে বিভিন্ন হইলেও তাহারা মূলতঃ ভিন্ন হইবে না। কিন্তু ত্রুটিপূর্ণ পদ্ধতিতে সমাধান করিলে সঠিক সমাধান ছাড়াও হয়ত কোন কোন ক্ষেত্রে এমন কতকগুলি সমাধান পাওয়া যায়, যাহা প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়। ইহাদের বলা হয় **বহিরাগত সমাধান** (Extraneous solution)। উদাহরণ 4-এ প্রদত্ত সমীকরণটি এইরূপ একটি সমীকরণ ; ইহাদের সাধারণ রূপ, $a \cos\theta + b \sin\theta = c$. উপরোক্ত সমীকরণটিকে আমরা নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে সমাধান করি ;

এখানে, $\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\theta$. উভয় পক্ষের বর্গ লইলে,

$$\cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2} = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta.$$

$$\therefore\quad 2\cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta - \tfrac{1}{2} = 0.$$

$$\therefore\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4.2.\frac{1}{2}}}{2.2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{12} \text{ বা } \cos\frac{7\pi}{12}.$$

$$\therefore\quad \theta = 2n\pi \pm \frac{1}{12}\pi, \text{ বা } 2n\pi \pm \frac{7\pi}{12}.$$

কিন্তু, প্রদত্ত সমীকরণে θ-র পরিবর্তে $2n\pi - \frac{\pi}{12}$ বা $2n\pi + \frac{7\pi}{12}$ বসাইলে দেখা যায়, ইহারা সমীকরণের সমাধান নয়। অতএব, উপরের নিয়মে ত্রুটি আছে ; এই **ত্রুটি হইল সমীকরণটিকে বর্গ করা।** কারণ, বর্গ করিলে $\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sin\theta$, অর্থাৎ, $\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, এই সমীকরণটিও উহার অন্তর্ভুক্ত হইবে এবং এই সমীকরণটির সমাধানই $2n\pi - \frac{\pi}{12}$ এবং $2n\pi + \frac{7\pi}{12}$; উপরোক্ত রূপের সমীকরণগুলির পরবর্তী উদাহরণে প্রদত্ত নিয়মানুসারে সমাধান করাই প্রকৃষ্ট পন্থা।

সুতরাং, কোন সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করিয়া তাহা সঠিক হইয়াছে কিনা পরীক্ষা করিয়া লওয়াই শ্রেয় ; কারণ, তাহা করিলেই বহিরাগত সমাধানগুলি আবিষ্কার করা সম্ভব।

Ex. 5. *Solve* $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ ($c \not> \sqrt{a^2+b^2}$).

মনে করি, $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$; (r-কে ধনাত্মক কল্পনা করিয়া α-র ক্ষুদ্রতম মান গ্রহণ করিতে হইবে)।

অতএব, $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

a এবং b-এর চিহ্ন-দ্বারা জানা যাইবে, α কোন্ পাদে অবস্থিত।

সুতরাং, a এবং b দেওয়া থাকিলে r এবং α-র নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাইবে।

অতঃপর, সমীকরণটিকে লেখা যায়, $r\cos(\theta-\alpha) = c$

$$\text{বা,}\quad \cos\left(\theta-\alpha\right) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta.$$

β ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার কোসাইন $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; অতএব, a, b ও c জানা থাকিলে β-ও নির্দিষ্টরূপে জানা যাইবে।

অতএব, $\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$. $\quad\therefore\ \theta = \alpha + 2n\pi \pm \beta$.

Ex. 6. *Solve* $4\cos x + 5\sin x = 5$, *given* $\tan 51^\circ 21' = \frac{5}{4}$.

প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষকে $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ দ্বারা ভাগ করিলে দেখা যায়,

$$\frac{4}{\sqrt{41}}\cos x + \frac{5}{\sqrt{41}}\sin x = \frac{5}{\sqrt{41}} \quad \cdots (1)$$

যেহেতু, $\tan 51^\circ 21' = \frac{5}{4}$,

$$\therefore\ \sin 51^\circ 21' = \frac{5}{\sqrt{41}},\ \cos 51^\circ 21' = \frac{4}{\sqrt{41}}.$$

সুতরাং, (1)-কে আমরা বলিতে পারি যে,

$$\cos 51^\circ 21' \cos x + \sin 51^\circ 21' \sin x = \sin 51^\circ 21'$$

$$\text{বা,}\quad \cos(x - 51^\circ 21') = \sin 51^\circ 21' = \cos 38^\circ 39'.$$

$$\therefore\ x - 51^\circ 21' = 2n\pi \pm 38^\circ 39'.$$

$$\therefore\ x = 2n\pi + 90^\circ,\ \text{বা,}\ 2n\pi + 12^\circ 42'.$$

Ex. 7. (i) *Solve* $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ *for* $-\pi < x < \pi$.

উদাহরণ 3 হইতে আমরা জানি প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান

$$x = n\pi + \tfrac{1}{2}\pi \quad \cdots (1)$$

$$\text{বা,}\quad x = n\pi \pm \tfrac{1}{4}\pi. \quad \cdots (2)$$

সমাধান (1)-এ $n=0, -1$ বসাইলে, $x=\frac{1}{2}\pi$ এবং $-\frac{1}{2}\pi$, ইহারা উভয়েই প্রদত্ত মান $-\pi$ এবং π-এর মধ্যে অবস্থান করিবে।

সমাধান (2)-এ $n=0, 1, -1$ বসাইলে, আমরা $-\pi$ ও π-এর মধ্যে অবস্থিত নিম্নলিখিত সমাধানগুলি পাই ঃ

$$x = \pm\tfrac{1}{4}\pi,\ \tfrac{3}{4}\pi,\ -\tfrac{3}{4}\pi.$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান ঃ $x=\pm\dfrac{\pi}{4}, \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{4}$.

(ii) *Solve* $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$,
for $-2\pi<\theta<2\pi$ *and* $3\pi<\theta<5\pi$.

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ দ্বারা ভাগ করিলে, আমরা নিম্নলিখিত সমীকরণটি পাই ঃ

$$\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{2}{2}=1,$$

বা, $\cos\theta.\cos\frac{1}{3}\pi+\sin\theta.\sin\frac{1}{3}\pi=1$, বা, $\cos(\theta-\frac{1}{3}\pi)=1=\cos 0^\circ$.

$\therefore\ \theta-\frac{1}{3}\pi=2n\pi$, বা, $\theta=2n\pi+\frac{1}{3}\pi$.

এখন, $n=0, -1$ বসাইলে, $\theta=\frac{1}{3}\pi, -\frac{5}{3}\pi$, এবং ইহারা $(-2\pi, 2\pi)$-এর মধ্যে অবস্থান করে।

আবার, $n=1, 2$ বসাইলে, $\theta=\frac{7}{3}\pi, \frac{13}{3}\pi$, এবং ইহারা $(3\pi, 5\pi)$-এর মধ্যে অবস্থান করে।

Ex. 8. *Solve* $\tan ax=\cot bx$.

এখানে, $\tan ax=\cot bx=\tan(\frac{1}{2}\pi-bx)$.

সুতরাং, $ax=n\pi+\frac{1}{2}\pi-bx$. $\therefore\ x=\dfrac{2n+1}{a+b}\cdot\dfrac{\pi}{2}$.

Ex. 9. *If* $\sec ax+\sec bx=0$, *show that the values of* x *form two series in A. P.*

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি,

$$\frac{1}{\cos ax}+\frac{1}{\cos bx}=0 \quad \text{বা,} \quad \cos ax+\cos bx=0$$

বা, $2\cos\frac{1}{2}(a+b)x\cos\frac{1}{2}(a-b)x=0$.

সুতরাং, $\cos\frac{1}{2}(a+b)x=0$ অথবা, $\cos\frac{1}{2}(a-b)x=0$

$\therefore\ \frac{1}{2}(a+b)x=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$, অথবা, $\frac{1}{2}(a-b)x=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$,

অর্থাৎ, $x = \frac{(2n+1)\pi}{a+b}$ অথবা, $x = \frac{(2n+1)\pi}{a-b}$, যেখানে n শূন্য, বা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

এক্ষণে, x-এর এই দুই শ্রেণীর মান দুইটি সমান্তরশ্রেণী গঠন করিল এবং সমান্তরশ্রেণীদ্বয়ের সাধারণ অন্তর যথাক্রমে $\frac{2\pi}{a+b}$ এবং $\frac{2\pi}{a-b}$.

Ex. 10. *If* $\sin(\pi \cos\theta) = \cos(\pi \sin\theta)$, *prove that*

$$\pm \cos\left(\theta \mp \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4n \pm 1}{2\sqrt{2}}, \text{ n being zero or any integer.}$$

যেহেতু, $\sin(\pi \cos\theta) = \cos(\pi \sin\theta)$.

$$\therefore \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \pi\cos\theta) = \cos(\pi \sin\theta).$$

$$\therefore \pi \sin\theta = 2n\pi \pm (\tfrac{1}{2}\pi - \pi\cos\theta)$$

বা, $\sin\theta \pm \cos\theta = \frac{4n \pm 1}{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{4n \pm 1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta \pm \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta = \frac{4n \pm 1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\pm\cos\left(\theta \mp \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4n \pm 1}{2\sqrt{2}}$.

Examples XI

Solve the following equations (*Ex. 1 to 23*) :—

1. $\cot^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 3$.

2. (i) $2\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 3$.

(ii) $\tan^2\theta = 3\operatorname{cosec}^2\theta - 1$ [C. U. 1939]

3. $\tan x - \cot x = \operatorname{cosec} x$.

4. $\cot x - \cot 2x = 2$.

5. $2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$.

6. $\sin 5\theta + \sin\theta = \sin 3\theta$.

7. $\sin m\theta + \sin n\theta = 0$.

8. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$.

9. $\cot 2x = \cos x + \sin x$.

10. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, for $-\pi < x < \pi$.

11. $\sin 2x \tan x + 1 = \sin 2x + \tan x$.

12. $\cot x - \tan x = 2$. [C. U. 1934, '37]

13. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$. [C. U. 1938, '47]

14. $2 \sin x \sin 3x = 1$.

15. $\sin \theta + 2 \cos \theta = 1$. [C. U. 1933]

16. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$.

17. $\tan (\frac{1}{4}\pi + \theta) + \tan (\frac{1}{4}\pi - \theta) = 4$. [C. U. 1949]

18. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$. [C. U. 1941, '45]

19. $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{2}$. [C. U. 1944]

20. $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$, for $-2\pi < x < 2\pi$.

21. $\cos 2x = \cos x \sin x$.

22. $2 \cot x + \sin x = 2 \operatorname{cosec} x$.

23. $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$. [C. U. 1943]

24. Solve $2 \sin^2 x + \sin x = 3$; and find all the angles between $0°$ and $1000°$ which satisfy it.

25. Find the solution of the equations (general solution is not required)

$$\tan x + \tan y = 2$$
$$2 \cos x \cos y = 1.$$

26. If $\tan ax - \tan bx = 0$, show that the values of x form a series in A.P.

27. Solve

(i) $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$. [C. U. 1941, '46]

(ii) $\cos 9x \cos 7x = \cos 5x \cos 3x$, $-\frac{1}{4}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\pi$.

(iii) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$. [A. I. 1941]

(iv) $\cos x - \sin x = \cos \alpha + \sin \alpha$. [B. H. U. 1938]

(v) $\cos^3 x - \cos x \sin x - \sin^3 x = 1$.

(vi) $\cos 6x + \cos 4x = \sin 3x + \sin x$.

(vii) $\dfrac{\sin \alpha}{\sin 2x} + \dfrac{\cos \alpha}{\cos 2x} = 2$.

28. Solve $5 \cos \theta + 2 \sin \theta = 2$, given $\tan 68° 12' = 2\frac{1}{2}$.

29. Find those pairs of solutions of the following equations which correspond to positive solutions less than 2π of each individual equation :—

(i) $\sin(\alpha-\beta)=0$; $\sin(\alpha+\beta)=1$.

(ii) $\sin(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$.

30. If $\sin A=\sin B$, $\cos A=\cos B$, prove that either A and B are equal or they differ by some multiple of four right angles.
[C. U. 1935]

31. Show that the three equations

$$\sin^2\theta=\sin^2\alpha,\ \cos^2\theta=\cos^2\alpha,\ \tan^2\theta=\tan^2\alpha$$

are all identical and the solution is always $n\pi\pm\alpha$.

32. Show that the same two series of angles are given by the equations

$$x+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6} \text{ and } x-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

ANSWERS

1. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$, *i.e.* $(2k+1)\frac{\pi}{4}$. **2.** (i) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. (ii) $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

3. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $(2k+1)\pi$. **4.** $\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$.

5. $n\pi+\frac{\pi}{4}$, or, $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. **6.** $\frac{n\pi}{3}$, or, $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

7. $\frac{r\pi}{m+(-1)^r n}$. **8.** $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, or, $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, or, $(2n+1)\frac{\pi}{8}$.

9. $n\pi-\frac{\pi}{4}$, or, $\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\alpha}{2}$, where $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **10.** $\frac{1}{4}\pi$.

11. $n\pi+\frac{\pi}{4}$. **12.** $(4n+1)\frac{\pi}{8}$. **13.** $2n\pi+\frac{5\pi}{12}$, or, $2n\pi-\frac{\pi}{12}$.

14. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, or, $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. **15.** $2n\pi+\frac{\pi}{2}$, or, $2n\pi-\beta$ where β is a positive acute angle whose sine is $\frac{3}{5}$. **16.** $\frac{1}{6}n\pi$. **17.** $n\pi\pm\frac{1}{6}\pi$.

18. $(4n+1)\frac{\pi}{12}$, $[n\neq 3m+2.]$ **19.** $2n\pi+\frac{7}{12}\pi$, or, $2n\pi+\frac{1}{12}\pi$.

20. $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$. **21.** $\frac{1}{2}(n\pi+\alpha)$, where $\tan\alpha=2$. **22.** $2n\pi$.

23. $2n\pi$, $\frac{1}{6}(4n+1)\pi$. **24.** $90°, 450°, 810°$. **25.** $\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi$.

27. (i) $\frac{1}{2}n\pi+\frac{1}{4}\pi$; $2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$. (ii) $0, \pm\frac{\pi}{12}, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}$.

(iii) $\frac{n\pi}{3}$; $n\pi \pm \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(iv) $2n\pi - a, \frac{4n-1}{2}\pi + a$.

(v) $2n\pi$, or, $2n\pi - \frac{1}{2}\pi$.

(vi) $(2n+1)\frac{\pi}{2}, \frac{4n+1}{14}\pi, \frac{4n-1}{6}\pi$.

(vii) $n\pi + \frac{a}{2}$; $(2n+1)\frac{\pi}{6} - \frac{a}{6}$.

28. $n\pi + (-1)^n\, 21°\ 48' - 68°\ 12'$.

29. (i) $\alpha = \beta = \frac{1}{4}\pi$; or, $\alpha = \frac{3}{4}\pi, \beta = -\frac{1}{4}\pi$.

(ii) $\alpha = \frac{1}{4}\pi, \beta = \frac{1}{12}\pi$; or, $\alpha = \frac{11}{12}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi$

or, $\alpha = \frac{5}{4}\pi, \beta = \frac{5}{12}\pi$; or, $\alpha = \frac{7}{12}\pi, \beta = -\frac{1}{4}\pi$.

দ্বাদশ অধ্যায়

বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক

(Inverse Circular Functions)

12·1. $\sin\theta = x$ সমীকরণটির তাৎপর্য এই যে, θ এমন একটি কোণ, যাহার সাইন x-এর সমান। অনেক ক্ষেত্রে ইহা বিপরীতভাবে অর্থাৎ $\theta = \sin^{-1}x$ এইরূপে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং, $\sin^{-1}x$ প্রতীকের তাৎপর্য এই যে, ইহা এমন একটি কোণ যাহার সাইন x-এর সমান। অতএব, $\sin^{-1}x$ একটি কোণ এবং $\sin\theta$ একটি সংখ্যা। $\sin\theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1}x$ এই দুইটি অভিন্ন; একটি দেওয়া থাকিলে তাহা হইতে অপরটি অনায়াসেই লেখা যায়। $\sin^{-1}x$ প্রতীকটি সাধারণতঃ sine-inverse x —এইভাবে পঠিত হয়।

দ্রষ্টব্য : $(\sin^{-1}x)$-কে $(\sin x)^{-1}$ অর্থাৎ $\dfrac{1}{\sin x}$-এর সহিত যেন ভুল করা না হয়— প্রথমটি একটি কোণ এবং দ্বিতীয়টি একটি সংখ্যা।

12·2. একাদশ অধ্যায় হইতে আমরা জানি যে, কোন একটি কোণ θ-র সাইন যদি x-এর সমান হয়, তাহা হইলে $n\pi + (-1)^n\theta$ —এই শ্রেণীর অন্তর্গত সকল কোণের সাইন-ই x-এর সমান হইবে। অতএব, $\sin^{-1}x$-এর অসংখ্য মান হইতে পারে এবং সেইজন্য $\sin^{-1}x$-কে একটি বহুমান-বিশিষ্ট অপেক্ষক (Multiple-valued Function) বলে।

সুতরাং, **$\sin^{-1}x$-এর সাধারণ মান $= n\pi + (-1)^n \sin^{-1}x$,** (শেষোক্ত $\sin^{-1}x$ যে-কোন একটি কোণ যাহার sine x-এর সমান)।

অনুরূপভাবে, $\cos^{-1}x$-এর সাধারণ মান $= 2n\pi \pm \cos^{-1}x$,

এবং $\tan^{-1}x$-এর সাধারণ মান $= n\pi + \tan^{-1}x$.

θ-র ক্ষুদ্রতম আঙ্কিক মান (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)-কে $\sin^{-1}x$-এর মুখ্য মান (principal value) বলা হয়; যথা, $\sin^{-1}\frac{1}{2}$-এর মুখ্য মান 30°, ইত্যাদি। কোন কোণানুপাতের সংশ্লিষ্ট যদি দুইটি কোণ থাকে, যাহাদের আঙ্কিক মান অভিন্ন, কিন্তু চিহ্ন ভিন্ন, তাহা হইলে ধনাত্মক কোণকেই মুখ্য মান হিসাবে গণ্য করা হয়; যেমন $\cos^{-1}\frac{1}{2}$-এর মুখ্য মান 60°, -60° নয়; যদিও $\cos(-60^\circ)$ ও $\frac{1}{2}$-এর সমান।

সমস্ত সংখ্যাবাচক উদাহরণে সাধারণতঃ মুখ্য মানই গণ্য করা হয়।

$\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ প্রভৃতি রাশিগুলিও $\sin^{-1}x$-এর অনুরূপ। এই সমস্ত রাশিমালাকে বলা হয় বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক।

12·3. $\sin\theta = x$ হইলে, $\theta = \sin^{-1}x$, অর্থাৎ $\boldsymbol{\theta = \sin^{-1}\sin\theta}$.
অনুরূপভাবে, $\boldsymbol{\theta = \cos^{-1}\cos\theta = \tan^{-1}\tan\theta}$; ইত্যাদি।
পুনরায়, $\theta = \sin^{-1}x$ হইলে, $\sin\theta = x$, অর্থাৎ $\boldsymbol{\sin\sin^{-1}x = x}$.
অনুরূপভাবে, $\boldsymbol{\cos\cos^{-1}x = x}$; $\boldsymbol{\tan\tan^{-1}x = x}$; ইত্যাদি।
আরও আমরা প্রমাণ করিতে পারি যে,

$$\mathbf{cosec}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{sin}^{-1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\ ;\ \ \mathbf{cot}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{tan}^{-1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\ ;\ \ \mathbf{sec}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{cos}^{-1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}.$$

মনে করি, $\text{cosec}^{-1}x = \theta$, তাহা হইলে, $\text{cosec}\,\theta = x$.

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{x}.\quad \text{সুতরাং, } \theta = \sin^{-1}\frac{1}{x}.\quad \therefore\ \text{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}.$$

এইভাবেই প্রমাণ করা যায় যে, $\text{cosec}^{-1}\dfrac{1}{x} = \sin^{-1}x$.

অপর দুইটি অভেদও অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়।

12·4. সমগ্র কোণানুপাতগুলিকে যেমন যে-কোন একটি কোণানুপাতের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়, অনুরূপভাবে সমগ্র বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক-গুলিকেও যে-কোন একটি বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

যথা— মনে করি $\sin^{-1}x = \theta$. $\therefore\ \sin\theta = x$.

$$\cos\theta = \sqrt{1-x^2}\ ;\ \ \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ \ \cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ;$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ \ \text{এবং}\ \ \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{x}.$$

$$\therefore\ \theta = \sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}.$$

12·5. *To prove that*

(i) $\boldsymbol{\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}}$

(ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$.

(i) মনে করি, $\sin^{-1}x = \theta$; তাহা হইলে $\sin\theta = x$.

এক্ষণে, $\sin\theta = \cos(\frac{1}{2}\pi - \theta)$.

$\therefore\ \cos(\frac{1}{2}\pi - \theta) = x, \qquad \therefore\ \cos^{-1}x = \frac{1}{2}\pi - \theta$.

সুতরাং, $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \theta + \frac{1}{2}\pi - \theta = \frac{1}{2}\pi$.

(ii) মনে করি, $\tan^{-1}x = \theta$; তাহা হইলে, $\tan\theta = x$.

এক্ষণে, $\tan\theta = \cot(\frac{1}{2}\pi - \theta)$.

$\therefore\ \cot(\frac{1}{2}\pi - \theta) = x. \qquad \therefore\ \cot^{-1}x = \frac{1}{2}\pi - \theta$.

$\therefore\ \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \theta + \frac{1}{2}\pi - \theta = \frac{1}{2}\pi$.

(iii) মনে করি, $\operatorname{cosec}^{-1}x = \theta. \qquad \therefore\ \operatorname{cosec}\theta = x$.

এখন, $\operatorname{cosec}\theta = \sec(\frac{1}{2}\pi - \theta)$.

$\therefore\ \sec(\frac{1}{2}\pi - \theta) = x. \qquad \therefore\ \sec^{-1}x = \frac{1}{2}\pi - \theta$.

অতএব, $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \theta + \frac{1}{2}\pi - \theta = \frac{1}{2}\pi$.

12·6. *To prove that*

(i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

(ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$.

মনে করি, $\tan^{-1}x = \alpha$ এবং $\tan^{-1}y = \beta$.

$\therefore\ \tan\alpha = x, \qquad \tan\beta = y$.

এখন, $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x+y}{1-xy}$.

$$\therefore\ \alpha + \beta = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy},$$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

পুনরায়, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{x-y}{1+xy}$.

$$\therefore\quad \alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}.$$

$$\therefore\quad \tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}.$$

দ্রষ্টব্য : অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\cot^{-1}x\pm\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{xy\mp 1}{y\pm x}.$$

12·7. *To prove that*

$$\mathbf{\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}}.$$

মনে করি, $\tan^{-1}x=\alpha$; $\tan^{-1}y=\beta$; $\tan^{-1}z=\gamma$.

অতএব, $\tan\alpha=x$; $\tan\beta=y$; $\tan\gamma=z$.

এখন, $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

সুতরাং, $\alpha+\beta+\gamma=\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$.

$$\therefore\quad \tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

দ্রষ্টব্য : 12·6 অনুচ্ছেদের সূত্র ক্রমান্বয়ে দুইবার প্রয়োগ করিলেও উপরোক্ত বিষয়টি প্রমাণিত হয়। কারণ,

$$\text{বাম পক্ষ}=(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)+\tan^{-1}z$$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}+\tan^{-1}z.$$

পুনরায় অনুঃ 12·6-এর সূত্র প্রয়োগ করিলেই উপরের বিষয়টি প্রমাণিত হইবে।

12·8. বস্তুতঃ, সাধারণ অপেক্ষক-সম্বলিত সূত্রগুলি প্রয়োগ করিয়া বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক-সম্বলিত অনুরূপ বহু সূত্রই নির্ণয় করা যায়। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

Ex. 1. *Show that*

(i) $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\}$.

(ii) $\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

মনে করি, $\sin^{-1}x = \alpha$. $\therefore$ $\sin\alpha = x$ এবং $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$,

এবং, $\sin^{-1}y = \beta$. $\therefore$ $\sin\beta = y$ এবং $\cos\beta = \sqrt{1-y^2}$.

এখন, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$$= x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}.$$

$$\therefore \quad \alpha \pm \beta = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\}.$$

কিন্তু, $\alpha \pm \beta = \sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y$; সুতরাং, নির্ণেয় অভেদটি প্রমাণিত হইল।

(ii) এই অভেদগুলিও অনুরূপভাবে $\cos(\alpha \pm \beta)$ হইতে প্রমাণ করা যাইবে।

Ex. 2. *Show that*

(*i*) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

(*ii*) $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2 - 1)$.

(*iii*) $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

(i) মনে করি, $\sin^{-1}x = \alpha$. $\therefore$ $\sin\alpha = x$. $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$.

এখন, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2x\sqrt{1-x^2}$.

$$\therefore \quad 2\alpha = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}).$$

$$\therefore \quad 2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}).$$

(ii) এবং (iii). এই অভেদগুলিও অনুরূপভাবে $\cos 2\alpha$ ও $\tan 2\alpha$-র সূত্র হইতে প্রমাণ করা যাইবে। [অনুঃ 8·1 দ্রষ্টব্য।]

দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত অভেদ তিনটি যথাক্রমে $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y$, $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y$ ও $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y$-এর মানগুলিতে y-এর স্থানে x বসাইলেও পাওয়া যাইবে।

Ex. 3. *Show that*

(*i*) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$.

(*ii*) $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$.

(*iii*) $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

(i) মনে করি, $\sin^{-1}x=\theta$. $\therefore\ \sin\theta=x$.

এখন, $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3x-4x^3$.

$\therefore\ 3\theta=\sin^{-1}(3x-4x^3)$,

অর্থাৎ, $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(ii) এবং (iii). $\cos\theta$-র সাহায্যে প্রকাশিত $\cos 3\theta$-র মান এবং $\tan\theta$-র সাহায্যে প্রকাশিত $\tan 3\theta$-র মান-সম্বলিত সূত্রদ্বয়ের সাহায্যে এই দুইটি অভেদও প্রমাণ করা যায়। [অনুঃ ৪'2 দ্রষ্টব্য]

দ্রষ্টব্য ঃ 12'7 অনুচ্ছেদের সূত্রে $x=y=z$ বসাইলে (iii)-এর অভেদটি পাওয়া যায়।

Ex. 4. *Show that*

$$2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

মনে করি, $\tan^{-1}x=\theta$. $\therefore\ \tan\theta=x$.

যেহেতু, $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1+x^2}$ [অনুঃ ৪'3 দ্রষ্টব্য]

$\therefore\ 2\theta$ অর্থাৎ $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$.

পুনরায়, যেহেতু $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

এবং $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1-x^2}$,

অতএব, এই দুইটির সাহায্যে অপর দুইটি বিষয়ও প্রমাণিত হয়।

Ex. 5. *Show that*

$$\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}=0.$$

এখন, $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}=\tan^{-1}a-\tan^{-1}b$ [অনুঃ 12'6 (ii) দ্রষ্টব্য]

$\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}=\tan^{-1}b-\tan^{-1}c$

$\tan^{-1}\dfrac{c-a}{1+ca}=\tan^{-1}c-\tan^{-1}a$.

উপরোক্ত অভেদগুলি যোগ করিলে নির্ণেয় অভেদটি পাওয়া যাইবে।

Ex. 6. *Show that*

$$2\ tan^{-1}\tfrac{1}{5}+tan^{-1}\tfrac{1}{4}=tan^{-1}\tfrac{32}{43}.$$

যেহেতু, $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$, [উদা. 4 দ্রষ্টব্য]

$$2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}}=\tan^{-1}\frac{5}{12}.$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\tan^{-1}\tfrac{5}{12}+\tan^{-1}\tfrac{1}{4}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}}=\tan^{-1}\dfrac{32}{43}.$

Ex. 7. *Solve* $sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2}+sin^{-1}\dfrac{2b}{1+b^2}=2\ tan^{-1}x.$

[C. U. 1947]

যেহেতু, $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}=2\tan^{-1}x$ [উদা. 4. দ্রষ্টব্য]

বাম পক্ষ $=2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b.$

অতএব, সমীকরণটির রূপ হয়

$$2\tan^{-1}x=2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b.$$

অথবা, $\tan^{-1}x=\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\dfrac{a+b}{1-ab}.$

$$\therefore\quad x=\frac{a+b}{1-ab}.$$

Ex. 8. *Solve* $tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}.$

বাম পক্ষ $=\tan^{-1}\dfrac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x^2-1}{x^2-4}}=\tan^{-1}\dfrac{2x^2-4}{-3}.$

অতএব, সমীকরণটিকে আমরা লিখিতে পারি

$\tan^{-1}\dfrac{2x^2-4}{-3}=\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}1.$ $\therefore\ \dfrac{2x^2-4}{-3}=1$, অথবা, $2x^2=1$,

$$\therefore\qquad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ex. 9. *Show that* $\sin \cot^{-1} \tan \cos^{-1} x = x$.

মনে করি, $\cos^{-1}x = \alpha$ ... (1) $\therefore \cos \alpha = x$.

অতএব, $\tan \alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos \alpha} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ... (2)

আবার, মনে করি $\cot^{-1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \beta$ ... (3)

$$\therefore \quad \cot \beta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\therefore \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1-x^2}{x^2}}} = \frac{x}{1} = x.$$

এখন, $x = \sin \beta = \sin \cot^{-1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ [(3) হইতে]

$= \sin \cot^{-1} \tan \alpha$ [(2) দ্বারা]

$= \sin \cot^{-1} \tan \cos^{-1} x$. [(1) হইতে]

Examples XII

Prove (*Ex. 1 to 17*) that :—

1. (i) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\pi$.

(ii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1} \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

(iii) $\tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{8} + \tan^{-1} \frac{1}{18} = \cot^{-1} 3$.

2. $\tan^{-1} \frac{2}{11} + \cot^{-1} \frac{24}{7} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$.

3. $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$
$= 2(\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3})$.

4. (i) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} (x+1) = \tan^{-1} (x^2 + x + 1)$.

(ii) $\tan^{-1} \dfrac{1}{p+q} + \tan^{-1} \dfrac{q}{p^2+pq+1} = \tan^{-1} \dfrac{1}{p}$.

5. $\tan^{-1} a - \tan^{-1} c = \tan^{-1} \dfrac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1} \dfrac{b-c}{1+bc}$.

6. $\tan^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{27}{11}$.

7. $\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\pi$. [C. U. 1942]

8. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{1}{4}\pi.$ [C. U. 1937]

9. (i) $\sin(2\sin^{-1}x)=2x\sqrt{1-x^2}.$

(ii) $\{\cos(\sin^{-1}x)\}^2=\{\sin(\cos^{-1}x)\}^2.$

10. $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}.$

11. $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}.$ [C. U. 1943]

12. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}=\cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}.$

13. $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}$

$$=\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}.$$

14. $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15.$

15. $\cot^{-1}(\tan 2x)+\cot^{-1}(-\tan 3x)=x.$

16. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{1}{2}\pi.$ [C. U. 1941]

17. $4(\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi.$ [C. U. 1939]

18. If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$, show that

$$x+y+z=xyz.$$

19. If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{1}{2}\pi$, show that

$$yz+zx+xy=1.$$

20. If $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, show that

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$$

21. If $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$, show that

$$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz.$$

22. Find the values of

(i) $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}).$ [C. U. 1935]

(ii) $\cot(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a).$

(iii) $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right).$

23. If $\tan^{-1} y = 4 \tan^{-1} x$, find y as an algebraic function of x.

24. If $\tan^{-1} x, \tan^{-1} y, \tan^{-1} z$ are in A.P., find out the algebraic relation between x, y, z. If in addition, x, y, z are also in A.P., prove that $x = y = z$, [$y \neq 0, 1$, or -1]

25. Solve the following equations :

(i) $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\frac{8}{31}$.

(ii) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2}$.

(iii) $\tan(\cos^{-1} x) = \sin(\tan^{-1} 2)$.

(iv) $\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$.

(v) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1} + \tan^{-1}\dfrac{2x-1}{2x+1} = \tan^{-1}\dfrac{23}{36}$.

(vi) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{1}{3}\pi$.

(vii) $\sin^{-1} x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1} x$.

(viii) $\tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1} x + \tan^{-1}(x+1) = \tan^{-1} 3x$.

(ix) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} + \cot^{-1}\dfrac{1-x^2}{2x} = \dfrac{\pi}{3}$.

(x) $\cot^{-1}(x-1) + \cot^{-1}(x-2) + \cot^{-1}(x-3) = 0$.

26. Show that

(i) $\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{x-y} + \cot^{-1}\dfrac{yz+1}{y-z} + \cot^{-1}\dfrac{zx+1}{z-x} = 0$.

(ii) $\tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z)$
$= \cot(\cot^{-1} x + \cot^{-1} y + \cot^{-1} z)$.

(iii) $\tan^{-1}(\cot x) + \cot^{-1}(\tan x) = \pi - 2x$.

ANSWERS

22. (i) 1. (ii) 0. (iii) $\dfrac{x+y}{1-xy}$. **23.** $y = \dfrac{4x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4}$.

24. $(x-y)(1+yz) = (y-z)(1+xy)$. **25.** (i) $\frac{1}{4}$, or, -8. (ii) $\dfrac{a-b}{1+ab}$.

(iii) $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. (iv) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (v) $\frac{4}{3}$, or, $-\frac{3}{8}$. (vi) $\pm\frac{1}{14}\sqrt{21}$.

(vii) 0, or, $\frac{1}{2}$. (viii) 0, $\pm\frac{1}{2}$. (ix) $2-\sqrt{3}$. (x) $2+\frac{1}{3}\sqrt{6}$

ত্রয়োদশ অধ্যায়

ত্রিভুজের ধর্ম

(Properties of Triangles)

13·1. যে-কোন ত্রিভুজে তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ—এই ছয়টি অংশ আছে। ABC ত্রিভুজের তিনটি কোণকে যথাক্রমে A, B ও C এবং উহার বিপরীত বাহুগুলিকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা সূচিত করা হয়। এই ছয়টি অংশ অবশ্য পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। নিম্নলিখিত অনুচ্ছেদসমূহে উহাদের অন্তর্নিহিত বিভিন্ন সম্বন্ধ সম্পর্কে সিদ্ধান্ত করা হইবে।

13·2. যে-কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{\mathbf{a}}{\sin \mathbf{A}} = \frac{\mathbf{b}}{\sin \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{c}}{\sin \mathbf{C}}.$$

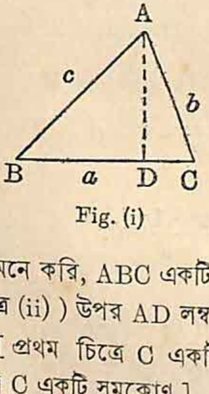


Fig. (i)

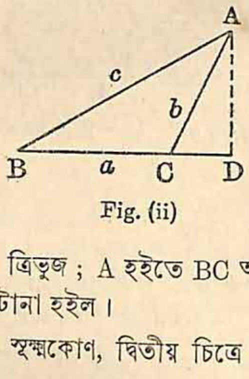


Fig. (ii)

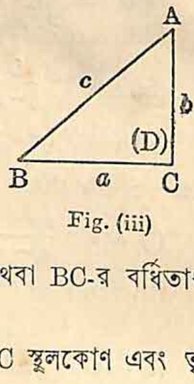


Fig. (iii)

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ ; A হইতে BC অথবা BC-র বর্ধিতাংশের (চিত্র (ii)) উপর AD লম্ব টানা হইল।

[প্রথম চিত্রে C একটি সূক্ষ্মকোণ, দ্বিতীয় চিত্রে C স্থূলকোণ এবং তৃতীয় চিত্রে C একটি সমকোণ]

ABD ত্রিভুজ হইতে, $AD = AB \sin ABD = c \sin B$

এবং ACD " " , $AD = AC \sin ACD = b \sin C$ [চিত্র (i)]

বা $= b \sin (\pi - C)$ [চিত্র (ii)]

অর্থাৎ $= b \sin C.$

$\therefore \quad b \sin C = c \sin B.$

অর্থাৎ, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}.$

অনুরূপভাবে, B হইতে CA-এর উপর লম্ব টানিয়া দেখানো যায় যে

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

(iii)-নং চিত্রে, C একটি সমকোণ, সুতরাং,

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ এবং } \sin B = \frac{b}{c}. \quad \sin C = \sin 90° = 1.$$

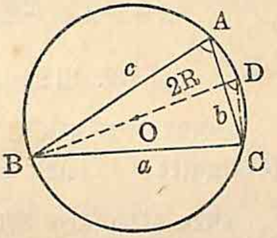
অতএব, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c = \frac{c}{\sin C}$.

অতএব, যে-কোন ত্রিভুজে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ... (1)

সুতরাং, **যে-কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি উহাদের বিপরীত কোণের সাইনের সমানুপাতী হইবে।**

বিকল্প প্রমাণ :

মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের (circum-circle) কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য R . এক্ষণে BO সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত করিলে মনে করি উহা পরিবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD যুক্ত করা হইল। অতএব, $\angle BCD = 90°$.



BCD ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}.$$

কিন্তু, $\angle BDC = \angle A$, যেহেতু উভয়েই একই বৃত্তাংশের অন্তর্গত।

$$\therefore \frac{a}{2R} = \sin A \text{ অথবা } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

অনুরূপভাবে, AO সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত করিলে উহা যদি পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলে CE এবং BE সংযুক্ত করিয়া দেখানো যায় যে

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \text{ এবং } \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\therefore \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin A}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin B}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{\sin C}} = \mathbf{2R}. \quad \cdots \quad (2)$$

দ্রষ্টব্য 1. A স্থূলকোণ হইলে, A এবং D বিন্দুদ্বয় BC বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থান করিবে ; তাহা হইলে, যেহেতু ABCD একটি বৃত্তীয় চতুর্ভুজ, সুতরাং

$\sin \text{BDC} = \sin(180^\circ - \text{A}) = \sin \text{A}$, এবং আমরা উপরোক্ত সিদ্ধান্তেই উপনীত হই। A একটি সমকোণ হইলে, $2\text{R} = a = \frac{a}{\sin \text{A}}$; অতএব উপরোক্ত সিদ্ধান্তেই পৌছানো যায়।

দ্রষ্টব্য 2. সিদ্ধান্ত (2) হইতে আমরা জানি,

$$a = 2\text{R} \sin \text{A}, \quad b = 2\text{R} \sin \text{B}, \quad c = 2\text{R} \sin \text{C} ;$$

$$\therefore \quad \sin \text{A} = \frac{a}{2\text{R}}, \quad \sin \text{B} = \frac{b}{2\text{R}}, \quad \sin \text{C} = \frac{c}{2\text{R}}.$$

13·3. যে-কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}, \quad \text{বা} \quad \mathbf{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}.$$

$$\mathbf{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B}, \quad \text{বা} \quad \mathbf{\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}.$$

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}, \quad \text{বা} \quad \mathbf{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}.$$

[অনু. 13·2-এর চিত্র দ্রষ্টব্য।]

প্রথমতঃ মনে করি C সূক্ষ্মকোণ [চিত্র (i)] ; অতএব, জ্যামিতির নিয়মানুসারে $\text{AB}^2 = \text{BC}^2 + \text{CA}^2 - 2\text{BC.CD}.$

এক্ষণে ACD ত্রিভুজ হইতে, $\text{CD} = \text{AC} \cos \text{C} = b \cos \text{C}.$

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \text{C}.$$

পুনরায়, C স্থূলকোণ কল্পনা করিলে [চিত্র (ii)]

$$\text{AB}^2 = \text{BC}^2 + \text{CA}^2 + 2\text{BC.CD}.$$

এক্ষণে, $\triangle\text{ACD}$ হইতে, $\text{CD} = \text{AC} \cos \text{ACD} = b \cos(\pi - c)$

$$= -b \cos \text{C}.$$

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \text{C}.$$

অবশেষে, C সমকোণ হইলে, [চিত্র (iii)]

$$\text{AB}^2 = \text{BC}^2 + \text{CA}^2$$

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \text{C} \quad [\because \cos \text{C} = \cos 90^\circ = 0]$$

অতএব, C-কোণের মান যাহাই হউক না কেন

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

অনুরূপভাবে, অপর দুইটি বিষয়ও প্রমাণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য ঃ এই উপপাদ্যে ত্রিভুজের কোণের কোসাইন উহার বাহুগুলির সাহায্যে প্রকাশ করা হইয়াছে।

13·4. যে-কোন ত্রিভুজে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\mathbf{a = b \cos C + c \cos B}$$
$$\mathbf{b = c \cos A + a \cos C}$$
$$\mathbf{c = a \cos B + b \cos A}$$

অনু ঃ 13·2-এর চিত্র দ্রষ্টব্য।

প্রথম চিত্রে, **C সূক্ষ্মকোণ,** এবং,

$$BC = BD + CD$$
$$= AB \cos ABD + AC \cos ACD,$$
$$\therefore \quad a = c \cos B + b \cos C.$$

দ্বিতীয় চিত্রে, **C স্থূলকোণ,** এবং,

$$BC = BD - CD$$
$$= AB \cos ABD - AC \cos ACD$$
$$= c \cos B - b \cos (180° - C)$$
$$= c \cos B + b \cos C.$$

তৃতীয় চিত্রে, **C সমকোণ,** এবং,

$$BC = AB \cos B$$
$$\therefore \quad a = c \cos B + b \cos C \quad [\because \cos C = \cos 90° = 0].$$

সুতরাং, সর্বক্ষেত্রেই, $a = b \cos C + c \cos B.$

অপর দুইটি বিষয়ও উপরোক্ত উপায়ে প্রমাণ করা যায়।

13·5. 13·3 অনুচ্ছেদ এবং 13·2-এর দ্রষ্টব্য অনুচ্ছেদ হইতে দেখান যায় যে,

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}$$

অনুরূপভাবে, $\tan B = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{c^2 + b^2 - b^2}$

$$\tan C = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}.$$

13·6. ত্রিভুজের বাহু-দ্বারা অর্ধ-কোণগুলির কোণানুপাত নির্ণয়: (Trigonometrical ratios of half-angles of a triangle in terms of the sides).

আমরা জানি, $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}.$$

এক্ষণে, s ত্রিভুজের পরিসীমার্ধ (semi-perimeter) হইলে,

$$2s = a + b + c.$$

$$\therefore \quad a - b + c = a + b + c - 2b = 2s - 2b = 2(s - b)$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2s - 2c = 2(s - c).$$

অতএব, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s - b).2(s - c)}{2bc}$ অর্থাৎ, $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s - b)(s - c)}{bc}$.

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}.$$

বর্গমূলের কেবলমাত্র ধনাত্মক মানটি গণ্য করিতে হইবে; কারণ, যে-কোন কোণ A $180°$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অর্থাৎ $\frac{1}{2}A < 90°$; সুতরাং, $\frac{1}{2}A$ কোণের সকল কোণানুপাতগুলিই ধনাত্মক হইবে।

পুনরায়, $2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bb}$$

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a)$$

$$\therefore \quad 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s.2(s-a)}{2bc} \text{ অর্থাৎ, } \cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

এখানেও, বর্গমূলের ধনাত্মক মান গণ্য করিতে হইবে ; কারণ, $\frac{1}{2}A < 90°$ বলিয়া $\cos \frac{1}{2}A$ ধনাত্মক।

পুনরায়, $\tan\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2} \div \cos\frac{A}{2}$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \div \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

অনুরূপভাবে, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ কোণের কোণানুপাতগুলিও বাহুগুলির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

অতএব, আমরা লিখিতে পারি ঃ

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \sin\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\ \sin\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \\ \cos\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-a)}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (3)$$

13·7. বাহু-দ্বারা ত্রিভুজের কোণের সাইনের মান নির্ণয়: (Sine of an angle of a triangle in terms of the sides.)

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

$$\therefore \quad \mathbf{\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

অনুরূপভাবে, $\mathbf{\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

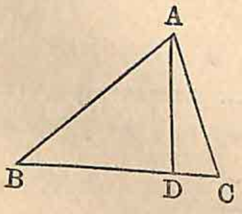
$$\mathbf{\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-সূচক রাশি বলিয়া [অনুঃ 13·8], উহাকে সাধারণতঃ গ্রীক অক্ষর Δ-দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং, উপরোক্ত সূত্রগুলি নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায়:

$$\mathbf{\sin A = \frac{2\Delta}{bc}, \quad \sin B = \frac{2\Delta}{ca}, \quad \sin C = \frac{2\Delta}{ab}}.$$

13·8. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল:

মনে করি, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ ; BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কিত করা হইল ; অতএব,



ΔACD হইতে, $AD = AC \sin C = b \sin C$.

এক্ষণে, $\Delta = \frac{1}{2}BC.AD = \frac{1}{2}ab \sin C$.

B এবং C হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব টানিয়া অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\Delta = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

বিকল্পভাবে, $\Delta = \frac{1}{2}ab \sin C$

$= \frac{1}{2}ac \sin B \qquad [\because \; b \sin C = c \sin B]$

$= \frac{1}{2}bc \sin A \qquad [\because \; a \sin B = b \sin A]$

সুতরাং, $\mathbf{\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C} \quad \cdots \quad$ (i)

$= \frac{1}{2}$ (দুইটি বাহুর গুণফল) $\times$ (অন্তর্ভূত কোণের সাইন)।

পুনরায়, $\triangle = \frac{1}{2}bc \sin A = bc \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A$

$$= bc \cdot \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \sqrt{\mathbf{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

উপরের রাশিতে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ বসাইলে, ইহা প্রমাণ করা যায় যে,

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4\}^{\frac{1}{2}}. \cdots \quad \text{(iii)}$$

পুনরায়, $\triangle = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{\mathbf{abc}}{\mathbf{4R}}. \quad \cdots \quad \text{(iv)}$

দ্রষ্টব্য ঃ কোন কোন পুস্তকে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে S-দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে ; কিন্তু S এবং s-এর মধ্যে লিখিবার অসুবিধা এড়াইবার জন্য সাধারণতঃ $\triangle$-ই সুবিধাজনক।

13·9. যে-কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\tan \frac{\mathbf{B-C}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{b-c}}{\mathbf{b+c}} \cot \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}}.$$

আমরা জানি, যে-কোন ত্রিভুজে $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$.

$$\therefore \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$= \cot \frac{B+C}{2} \tan \frac{B-C}{2}$$

$$= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B-C}{2} \qquad \left[\because \frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^\circ\right]$$

$$\therefore \quad \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}.$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\tan \frac{\mathbf{C-A}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{c-a}}{\mathbf{c+a}} \cot \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}}$$

এবং $$\tan \frac{\mathbf{A-B}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{a+b}} \cot \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}.$$

13·10. 13·2, 13·3, 13·4 অনুচ্ছেদগুলিতে উল্লিখিত সূত্রাবলী জ্যামিতিক চিত্রের সহায়তায় প্রমাণিত হইয়াছে। অবশ্য এই তিনটি সূত্র পরস্পর নিরপেক্ষ নয়; কারণ, যে-কোন একটি হইতে অপর সূত্রগুলি প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ 13·4 অনুচ্ছেদের সূত্রাবলী হইতে 13·3 অনুচ্ছেদের সূত্রাবলী কিভাবে পাওয়া যায় তাহা নিম্নে দেখানো হইতেছে।

13·4 অনুচ্ছেদ অনুসারে, $a = b \cos C + c \cos B.$

$$b = c \cos A + a \cos C.$$

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

এই তিনটি সূত্রকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা গুণ করিয়া, শেষের দুইটির সমষ্টি হইতে প্রথমটি বিয়োগ করিলে দেখা যায় যে,

$$b^2 + c^2 - a^2 = b(c \cos A + a \cos C) + c(a \cos B + b \cos A) - a(b \cos C + c \cos B) = 2bc \cos A.$$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

অনুরূপভাবে, আমরা 13·3 অনুচ্ছেদের অপর দুইটি সূত্রও পাইতে পারি।

দ্রষ্টব্য ঃ অন্যান্য সূত্রগুলির জন্য পরিশিষ্ট দ্রষ্টব্য।

13·11. যে সমস্ত ত্রিভুজ-সম্বন্ধীয় অভেদাবলীতে ত্রিভুজের বাহু ও কোণ উভয়েই বর্তমান, সেই সমস্ত ক্ষেত্রে বাহুকে কোণের সাহায্যে অথবা কোণকে বাহুর সাহায্যে প্রকাশ করা অনেক সময় সুবিধাজনক।

পুনরায়, $\tan \frac{1}{2}A$, $\tan \frac{1}{2}B$, $\tan \frac{1}{2}C$-এর মানগুলিকে সমান হর এবং করণীবিহীন লববিশিষ্ট ভগ্নাংশ হিসাবে প্রকাশ করা অনেক সময় সুবিধাজনক।

যথা, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \triangle$ হওয়ায়, $\tan \frac{1}{2}A$-এর হর এবং লব উভয়কেই $\sqrt{(s-b)(s-c)}$ -দ্বারা গুণ করিলে দেখা যায় যে,

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\triangle};$$

অনুরূপভাবে, $\tan \frac{B}{2} = \frac{(s-c)(s-a)}{\triangle}$, $\tan \frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\triangle}$.

পুনরায়, $\cot \frac{1}{2}A$-এর মানের হর এবং লব উভয়কে $\sqrt{s(s-a)}$ -দ্বারা গুণ করিলে,

$$\cot \frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\triangle};$$

অনুরূপভাবে, $\cot \frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\triangle}$, $\cot \frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\triangle}$.

13·12. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Show that in any triangle*

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

বাম পক্ষ $= (a \sin \mathrm{B} - b \sin \mathrm{A}) + (b \sin \mathrm{C} - c \sin \mathrm{B})$
$+ (c \sin \mathrm{A} - a \sin \mathrm{C}) = 0 + 0 + 0$

$= 0.$ $\quad$ [∵ অনুঃ 13·2 হইতে আমরা জানি $\dfrac{a}{\sin \mathrm{A}} = \dfrac{b}{\sin \mathrm{B}} = \dfrac{c}{\sin \mathrm{C}}$]

Ex. 2. *Show that in any triangle*

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0.$$

আমরা 13·2 অনুচ্ছেদ হইতে জানি যে, $a = 2\mathrm{R} \sin \mathrm{A}$
$= 2\mathrm{R} \sin (\mathrm{B} + \mathrm{C}).$ $\quad$ [∵ $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \pi$]

$\therefore \quad a \sin (\mathrm{B} - \mathrm{C}) = 2\mathrm{R} \sin (\mathrm{B} + \mathrm{C}) \sin (\mathrm{B} - \mathrm{C})$
$= 2\mathrm{R} (\sin^2 \mathrm{B} - \sin^2 \mathrm{C})$ $\quad$ [উদা. 2, অনুঃ 6·3 দ্রষ্টব্য]

অনুরূপভাবে, $\quad b \sin (\mathrm{C} - \mathrm{A}) = 2\mathrm{R} (\sin^2 \mathrm{C} - \sin^2 \mathrm{A})$
$c \sin (\mathrm{A} - \mathrm{B}) = 2\mathrm{R} (\sin^2 \mathrm{A} - \sin^2 \mathrm{B}).$

এখন, এই তিনটি পদ যোগ করিলে উদ্দিষ্ট বিষয়টি প্রমাণিত হইবে।

Ex. 3. *In any triangle, prove that*

$$(b - c) \cot \tfrac{1}{2}A + (c - a) \cot \tfrac{1}{2}B + (a - b) \cot \tfrac{1}{2}C = 0.$$

13·11 অনুচ্ছেদ অনুযায়ী $\cot \frac{1}{2}\mathrm{A}$, $\cot \frac{1}{2}\mathrm{B}$, $\cot \frac{1}{2}\mathrm{C}$ -এর মান বসাইলে,

বাম পক্ষ $= \dfrac{(b-c)\, s(s-a)}{\Delta} + \dfrac{(c-a)\, s(s-b)}{\Delta} + \dfrac{(a-b)\, s(s-c)}{\Delta}$

$$= \frac{s}{\Delta}\left\{(s-a)(b-c) + (s-b)(c-a) + (s-c)(a-b)\right\}$$

$$= \frac{s}{\Delta}\Big[s\{(b-c) + (c-a) + (a-b)\} - \{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\}\Big]$$

$$= \frac{s}{\Delta}\Big[0 - 0\Big] = 0.$$

Ex. 4. *If the cosines of two of the angles of a triangle are inversely proportional to the opposite sides, show that the triangle is either isosceles or right-angled.*

প্রশ্নানুযায়ী, $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$. [অনুঃ 13·2]

$\therefore$ $\sin A \cos A=\sin B \cos B$ বা $\sin 2A=\sin 2B$

বা $\sin 2A-\sin 2B=0$ বা $2\cos(A+B)\sin(A-B)=0$.

অতএব, $\cos(A+B)=0$, বা $\sin(A-B)=0$

$\cos(A+B)=0$ হইলে, $A+B=90°$, অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমকোণী।

$\sin(A-B)=0$ হইলে, $A-B=0$ বা $A=B$,

অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

Ex. 5. *If the sides of a triangle are in A. P., show that* $\cot\frac{1}{2}A$, $\cot\frac{1}{2}B$, $\cot\frac{1}{2}C$ *are also in A. P.*

$\cot\frac{1}{2}A$, $\cot\frac{1}{2}B$, $\cot\frac{1}{2}C$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে,

যদি $\cot\frac{1}{2}B-\cot\frac{1}{2}A=\cot\frac{1}{2}C-\cot\frac{1}{2}B$

অর্থাৎ যদি, $\dfrac{s(s-b)}{\triangle}-\dfrac{s(s-a)}{\triangle}=\dfrac{s(s-c)}{\triangle}-\dfrac{s(s-b)}{\triangle}$

অর্থাৎ, যদি, $(s-b)-(s-a)=(s-c)-(s-b)$

অর্থাৎ, যদি $a-b=b-c$ অর্থাৎ, যদি a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়।

Ex. 6. *Show that*

$$b^2 \sin 2C+c^2 \sin 2B=4\triangle.$$

বাম পক্ষ $=b^2.2\sin C\cos C+c^2.2\sin B\cos B$

$=2b\sin C.b\cos C+2c\sin B.c\cos B$

$=2b\sin C\,(b\cos C+c\cos B)$ [$\because b\sin C=c\sin B$]

$=2ab\sin C$ [অনুঃ. 13·4]

$=4.\frac{1}{2}ab\sin C=4\triangle$. [অনুঃ. 13·8]

Examples XIII(a)

In any triangle, prove that (*Ex. 1 to 21*) :—

1. $\sin\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$.

2. $\cos\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b+c}{a}\sin\dfrac{A}{2}$.

3. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c.$

4. $\dfrac{a+b}{a-b}=\tan\dfrac{A+B}{2}\cot\dfrac{A-B}{2}.$

5. $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C).$

6. $(b+c-a)\tan\dfrac{A}{2}=(c+a-b)\tan\dfrac{B}{2}=(a+b-c)\tan\dfrac{C}{2}.$

7. $\dfrac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\dfrac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\dfrac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}.$

8. $a^2(\sin^2B-\sin^2C)+b^2(\sin^2C-\sin^2A)$
$+c^2(\sin^2A-\sin^2B)=0.$

9. $a^2(\cos^2B-\cos^2C)+b^2(\cos^2C-\cos^2A)$
$+c^2(\cos^2A-\cos^2B)=0.$

10. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$

11. $a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}+b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}$
$+c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}=0.$

12. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0.$

13. $a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0.$

14. $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc.$

15. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0.$

16. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0.$

17. $\dfrac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\dfrac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}+\dfrac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=0.$

18. $(s-a)\tan\dfrac{A}{2}=(s-b)\tan\dfrac{B}{2}=(s-c)\tan\dfrac{C}{2}.$

19. $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0.$

20. $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=s^2$.

21. $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{s^2}{abc}$.

22. If A be 60°, show that $b+c=2a\cos\frac{B-C}{2}$.

23. Show that a triangle having its sides equal to 3, 5, 7 is an obtuse-angled triangle and determine the obtuse angle.

24. Given $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$, find A.

25. If $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$, prove that

$$C=60°, \text{ or, } 120°.$$

26. If $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$, prove that

$$C=45°, \text{ or, } 135°.$$

27. The sides of triangle are $2x+3$, x^2+3x+3, x^2+2x; show that the greatest angle is 120°.

28. If $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$, show that $C=60°$.

29. If $a=2b$ and $A=3B$, find the angles of the triangle.

30. If the cosines of two of the angles of a triangle are proportional to the opposite sides, show that the triangle is isosceles.

31. If $\cos A=\frac{\sin B}{2\sin C}$, show that the triangle is isosceles.

32. If $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$, prove that the triangle is either isosceles or right-angled.

33. If $(\cos A+2\cos C):(\cos A+2\cos B)=\sin B:\sin C$, prove that the triangle is either isosceles or right-angled.

34. If a^2, b^2, c^2 be in A.P., prove that cot A, cot B, cot C are also in A.P.

35. If $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$, show that the sides of the triangle are in A.P.

36. If $\sin A:\sin C=\sin(A-B):\sin(B-C)$, show that a^2, b^2, c^2 are in A.P.

37. If a, b, c are in A.P., show that

$$\cos A \cot \tfrac{1}{2}A, \cos B \cot \tfrac{1}{2}B, \cos C \cot \tfrac{1}{2}C \text{ are in A.P.}$$

[$\cos A \cot \frac{1}{2}A = (1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}A) \cot \frac{1}{2}A = \cot \frac{1}{2}A - \sin A.$]

38. Assuming $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A$ and using the value of $\cos A$ in terms of sides, show that $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

39. Find the area of the triangle whose sides are

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{x},\ \frac{z}{x} + \frac{x}{y},\ \frac{x}{y} + \frac{y}{z}.$$

40. In a triangle, if $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, find its area.

Prove that in any triangle :

41. $\dfrac{a^2 - b^2}{2} \cdot \dfrac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)} = \Delta.$

42. $4\Delta (\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2.$

43. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C.$

44. $a \sin B \sin C + b \sin C \sin A + c \sin A \sin B = \dfrac{3\Delta}{R}.$

45. $(a \sin A + b \sin B + c \sin C)^2$
$= (a^2 + b^2 + c^2)(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$

46. $\dfrac{\cos B \cos C}{bc} + \dfrac{\cos C \cos A}{ca} + \dfrac{\cos A \cos B}{ab} = \dfrac{1}{4R^2}.$

[Use $\Sigma \cot B \cot C = 1$; *ex.* 2, *Ex.* X.]

47. $\dfrac{b^2 - c^2}{a} \cos A + \dfrac{c^2 - a^2}{b} \cos B + \dfrac{a^2 - b^2}{c} \cos C = 0.$

48. $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{a}{bc} = \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{b}{ca} = \dfrac{\cos C}{c} + \dfrac{c}{ab}.$

49. $4\Delta = a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C.$

50. $\left(\dfrac{a^2}{\sin A} + \dfrac{b^2}{\sin B} + \dfrac{c^2}{\sin C}\right) \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2} = \Delta.$

ANSWERS

23. 120°. 24. $A = 60°$. 29. $A = 90°$, $B = 30°$, $C = 60°$.

39. $\sqrt{\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}}$. 40. 84.

13·13. ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ : (Circum-radius).

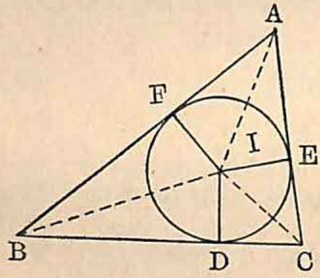
13·2 অনুচ্ছেদ হইতে জানা আছে যে,

$$\frac{\mathbf{a}}{\sin \mathbf{A}} = \frac{\mathbf{b}}{\sin \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{c}}{\sin \mathbf{C}} = 2\mathbf{R} \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

$$\therefore \quad R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{2bc \sin A} = \frac{\mathbf{abc}}{\mathbf{4\Delta}}. \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

13·14. ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ (In-radius).

মনে করি, I ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র এবং r ইহার ব্যাসার্ধ। D, E, F যথাক্রমে ত্রিভুজের বাহুর সহিত অন্তর্বৃত্তের স্পর্শবিন্দু।



অতএব, $ID = IE = IF = r$.

IA, IB, IC সংযুক্ত করা হইল।

এক্ষণে, $\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$

$= \frac{1}{2}BC.ID + \frac{1}{2}CA.IE + \frac{1}{2}AB.IF$

$= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$

$= \frac{1}{2}r(a+b+c) = rs.$

$$\therefore \quad \Delta = rs \qquad \therefore \quad \mathbf{r} = \frac{\Delta}{\mathbf{s}} \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

পুনরায়, $a = BC = BD + DC$

$= r \cot \frac{1}{2}B + r \cot \frac{1}{2}C$ [$\triangle IBD$ ও $\triangle ICD$ হইতে]

$= r\left[\frac{\cos \frac{1}{2}B}{\sin \frac{1}{2}B} + \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}C}\right] = r\frac{\cos \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C + \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}$

$= r\frac{\sin (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C)}{\sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C} = r\frac{\cos \frac{1}{2}A}{\sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}$

[$\because \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90°, \therefore \sin (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) = \cos \frac{1}{2}A$]

$$\therefore \quad r = \frac{a \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}A}.$$

এখন, অনুচ্ছেদ 13·13 (i) হইতে আমরা জানি যে,

$a = 2R \sin A = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A$

$$\therefore \quad \mathbf{r = 4R \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

পুনরায়, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, AF = AE, BD = BF, CD = CE. যেহেতু, এই ছয়টি রাশির সমষ্টি ত্রিভুজের পরিসীমার সমান, অতএব

$$AF + BD + CD = \text{অর্ধ-পরিসীমা} = s.$$

$$\therefore \quad AF + BC = AF + a = s.$$

$$\therefore \quad AF = s - a = AE\ ;$$

অনুরূপভাবে, $BF = s - b = BD$, $CE = s - c = CD$;

$\triangle IAF$ হইতে দেখা যায় যে, $IF = AF \tan IAF$.

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad \mathbf{r} &= \mathbf{(s-a)\tan \tfrac{1}{2}A} \\ \text{অনুরূপভাবে,} \quad \mathbf{r} &= \mathbf{(s-b)\tan \tfrac{1}{2}B} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{(s-c)\tan \tfrac{1}{2}C} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

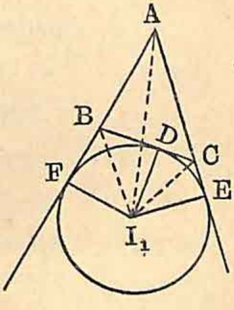
দ্রষ্টব্য : শীর্ষ-বিন্দু (Vertex) হইতে অন্তঃকেন্দ্রের দূরত্ব :

$\triangle IAF$ হইতে, $IA = IF \operatorname{cosec} IAF$. $\therefore$ $\mathbf{IA = r\ cosec\ \tfrac{1}{2}A.}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\mathbf{IB = r\ cosec\ \tfrac{1}{2}B}$, $\mathbf{IC = r\ cosec\ \tfrac{1}{2}C.}$

13·15. ত্রিভুজের বহির্ব্যাসার্ধ : (Ex-radii of a triangle).

মনে করি, ABC ত্রিভুজের A কোণের বিপরীতস্থ বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_1 এবং ব্যাসার্ধ r_1 ; D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর সহিত এই বৃত্তের স্পর্শবিন্দু।



B ও C কোণের বিপরীতস্থ বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_2 এবং r_3.

এক্ষণে, $I_1D = I_1E = I_1F = r_1$.

AI_1, BI_1 ও CI_1 যুক্ত করা হইল।

$$\text{এখন } \triangle ABC = \triangle I_1AB + \triangle I_1AC - \triangle I_1BC$$
$$= \tfrac{1}{2} I_1F \,.\, AB + \tfrac{1}{2} I_1E \,.\, AC - \tfrac{1}{2} I_1D \,.\, BC$$
$$= \tfrac{1}{2} r_1 c + \tfrac{1}{2} r_1 b - \tfrac{1}{2} r_1 a$$
$$= \tfrac{1}{2} r_1(b + c - a) = \tfrac{1}{2} r_1(a + b + c - 2a) = \tfrac{1}{2} r_1(2s - 2a)$$
$$= r_1(s - a).$$

অতএব, $\triangle = r_1(s-a)$. $\therefore$ $$\left.\begin{aligned} \mathbf{r_1} &= \frac{\Delta}{\mathbf{s-a}} \\ \text{অনুরূপভাবে}\quad \mathbf{r_2} &= \frac{\Delta}{\mathbf{s-b}} \\ \mathbf{r_3} &= \frac{\Delta}{\mathbf{s-c}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

পুনরায়, $a = BC = BD + CD$

$= r_1 \cot I_1BD + r_1 \cot I_1CD$,

($\triangle I_1BD$ ও $\triangle I_1CD$ হইতে)

$= r_1 \cot (90° - \frac{1}{2}B) + r_1 \cot (90° - \frac{1}{2}C)$,

[$\because$ $\angle I_1BD = \frac{1}{2}(180° - B) = 90° - \frac{1}{2}B$

$\angle I_1CD = \frac{1}{2}(180° - C) = 90° - \frac{1}{2}C$]

$$\therefore \quad a = r_1 (\tan \tfrac{1}{2}B + \tan \tfrac{1}{2}C) = r_1 \left[\frac{\sin \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}B} + \frac{\sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}C}\right]$$

$$= r_1 \frac{\sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$$

$$= r_1 \frac{\sin (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C)}{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C} = r_1 \frac{\cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$$

[$\because$ $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90°$]

$\therefore$ $r_1 = a \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C \,.\, \sec \frac{1}{2}A$.

এখন, $a = 2R \sin A = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A$ বসাইলে,

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= 4R \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C \\ \text{অনুরূপভাবে,}\ r_2 &= 4R \cos \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C \\ r_3 &= 4R \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

পুনরায়, $AE = AC + CE = b + CD$ [$\because$ $CE = CD$]

এবং, $AF = AB + BF = c + BD$ [$\because$ $BF = BD$]

কিন্তু, $AE = AF$, সুতরাং, যোগ করিলে দেখা যায় যে,

$2AE = b + c + BD + CD = b + c + a = 2s$. $\therefore$ $AE = s$.

পুনরায়, $\triangle AI_1E$ হইতে, $I_1E = AE \tan I_1AE$.

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad \mathbf{r_1} &= \mathbf{s \tan \tfrac{1}{2}A} \\ \text{অনুরূপভাবে,}\quad \mathbf{r_2} &= \mathbf{s \tan \tfrac{1}{2}B} \\ \text{এবং}\quad \mathbf{r_3} &= \mathbf{s \tan \tfrac{1}{2}C} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

দ্রষ্টব্য : শীর্ষবিন্দু হইতে বহিঃকেন্দ্রের দূরত্ব (Distances of Ex-centres from the vertices) :

$\triangle AI_1F$ হইতে, $I_1A = I_1F \text{ cosec } I_1AF.$

$\therefore \quad \mathbf{I_1A = r_1 \text{ cosec } \frac{1}{2}A}$

$\quad = \mathbf{4R \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$ [সূত্র (ii) অনুযায়ী]

$\triangle BI_1F$ হইতে, $I_1B = I_1F \text{ cosec } I_1BF$

$\therefore \quad \mathbf{I_1B = r_1 \sec \frac{1}{2}B}$ [$\because \angle I_1BF = 90° - \frac{1}{2}B$]

অনুরূপভাবে, $\mathbf{I_1C = r_1 \sec \frac{1}{2}C.}$

এইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\mathbf{I_2B = r_2 \text{ cosec } \frac{1}{2}B, I_3C = r_3 \text{ cosec } \frac{1}{2}C.}$

13·16. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Prove that* $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r}.$

13·15 অনুচ্ছেদের (i) সূত্রানুযায়ী

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{s-a}{\triangle} + \frac{s-b}{\triangle} + \frac{s-c}{\triangle}$$

$$= \frac{3s-(a+b+c)}{\triangle} = \frac{3s-2s}{\triangle} = \frac{s}{\triangle} = \frac{1}{r}.$$

Ex. 2. *Prove that* $4 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C = \dfrac{s}{R}.$

$$\text{বাম পক্ষ} = 4 \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$= \frac{4s}{abc} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{4s}{abc} \cdot \triangle \cdot = s \cdot \frac{4\triangle}{abc} = \frac{s}{R}.$$ [অনুঃ 13·13-এর (ii)-নং সূত্রানুযায়ী]

Ex. 3. *Show that*

$$\frac{bc - r_2r_3}{r_1} = \frac{ca - r_3r_1}{r_2} = \frac{ab - r_1r_2}{r_3}.$$

$$r_2r_3 = \frac{\triangle^2}{(s-b)(s-c)} = s(s-a).$$

$$\therefore \quad bc - r_2r_3 = \tfrac{1}{4}[4bc - 2s(2s-2a)]$$

$$= \tfrac{1}{4}[4bc - (a+b+c)(b+c-a)]$$

$$= \tfrac{1}{4}[4bc + a^2 - (b+c)^2] = \tfrac{1}{4}[a^2 - (b-c)^2]$$

$$= \tfrac{1}{4}[(a+b-c)(a-b+c)] = (s-b)(s-c).$$

$$\therefore \quad \frac{bc - r_2 r_3}{r_1} = \frac{(s-b)(s-c)}{r_1} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$= \frac{\Delta}{s} = r.$$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\dfrac{ca - r_3 r_1}{r_2} = r = \dfrac{ab - r_1 r_2}{r_3}$.

অতএব উদ্দিষ্ট বিষয়টি প্রমাণিত হইল।

Ex. 4. *Prove that in any triangle*

$$r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R.$$

বাম পক্ষ $= \left(\dfrac{\Delta}{s-a} + \dfrac{\Delta}{s-b}\right) + \left(\dfrac{\Delta}{s-c} - \dfrac{\Delta}{s}\right)$

$$= \Delta\,\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)} + \Delta \cdot \frac{c}{s(s-c)}$$

$$= \Delta c\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{s(s-c)}\right], \qquad [\because 2s = a+b+c]$$

$$= \Delta c \cdot \left[\frac{s(s-c) + (s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right]$$

$$= \Delta c \cdot \frac{2s^2 - s(a+b+c) + ab}{\Delta^2} = c \cdot \frac{2s^2 - s \,.\, 2s + ab}{\Delta}$$

$$= \frac{c \,.\, ab}{\Delta} = \frac{abc}{\Delta} = 4\text{R}.$$

Ex. 5. *If $r_1 = r_2 + r_3 + r$, prove that the triangle is right-angled.*

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি যে,

$$r_1 - r = r_2 + r_3$$

বা $\dfrac{\Delta}{s-a} - \dfrac{\Delta}{s} = \dfrac{\Delta}{s-b} + \dfrac{\Delta}{s-c}$

বা $\dfrac{\Delta a}{s(s-a)} = \dfrac{\Delta \,.\, (2s-b-c)}{(s-b)(s-c)} = \dfrac{\Delta \,.\, a}{(s-b)(s-c)}$.

$\therefore \quad s(s-a) = (s-b)(s-c).$

$\therefore \quad \tan^2 \frac{1}{2}A = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} = 1 \qquad \therefore \quad \tan \frac{1}{2}A = 1.$

$\therefore \quad \frac{1}{2}A = 45°. \qquad \therefore \quad A = 90°$

দ্রষ্টব্য ঃ বর্গমূল লইলে $\tan \frac{1}{2}A = \pm 1$ হইলেও, শুধু ধনাত্মক মান গণ্য করিতে হইবে, কারণ যে-কোন ত্রিভুজে $\frac{1}{2}A$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

Examples XIII (b)

Prove that in any triangle (*Ex. 1 to 14*) :—

1. $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{s}{R}$.

2. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

[*Use* $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$.]

3. $\frac{b-c}{r_1} + \frac{c-a}{r_2} + \frac{a-b}{r_3} = 0.$

4. $r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2 = s^2.$

5. $r = R(\cos A + \cos B + \cos C - 1).$

6. $r_1 = R(\cos B + \cos C - \cos A + 1).$

[*Use* $\cos B + \cos C - \cos A = -1 + 4 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$]

7. $a \cos B \cos C + b \cos C \cos A + c \cos A \cos B = \frac{\triangle}{R}$.

8. $a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R + r).$

$\left[a \cot A = \frac{a}{\sin A} \cdot \cos A = 2R \cos A. \right.$ *Then use Ex. 2.* $\left. \right]$

9. $R = \frac{1}{4} \frac{(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)(r_1 + r_2)}{r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2}.$

10. $\triangle = \sqrt{r r_1 r_2 r_3} = r^2 \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C.$

11. $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right) = \frac{4R}{r^2 s^2} = \frac{16R}{r^2 (a+b+c)^2}.$

[A. I. 1938]

12. $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 = \frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$

13. $r_1(r_2+r_3)\operatorname{cosec} A = r_2(r_3+r_1)\operatorname{cosec} B$
$= r_3(r_1+r_2)\operatorname{cosec} C.$

14. $\frac{bc}{r_1}+\frac{ca}{r_2}+\frac{ab}{r_3}=2R\left\{\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-3\right\}.$

15. In a triangle, $a=13$, $b=14$, $c=15$; find r and R.

16. If a, b, c are in A.P., show that r_1, r_2, r_3 are in H.P.

17. If in a triangle, $3R=4r$, show that

$$4(\cos A+\cos B+\cos C)=7.$$

18. If the diameter of an ex-circle be equal to the perimeter of the triangle, show that the triangle is right-angled.

[*Use* $r_1 = s \tan \frac{1}{2}A$.]

19. If $\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(1-\frac{r_1}{r_3}\right)=2$, show that the triangle must be right-angled.

20. If $8R^2=a^2+b^2+c^2$, show that the triangle is right-angled.

21. If S be the area of the in-circle and S_1, S_2, S_3 the areas of the escribed circles, then

$$\frac{1}{\sqrt{S}}=\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}.$$

22. In any triangle, prove that the area of the in-circle is to the area of the triangle as $\pi : \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C$.

23. If p_1, p_2, p_3 are the perpendiculars from the angular points of a triangle to the opposite sides, show that

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$

24. If x, y, z be the lengths of the perpendiculars from the circum-centre on the sides BC, CA, AB of the triangle ABC, prove that

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{4xyz}.$$

25. If x, y, z are respectively equal to IA, IB, IC, and α, β, γ are respectively equal to I_1A, I_2B, I_3C, show that

(i) $\frac{xyz}{abc} = \frac{r}{s}$. (ii) $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$.

(iii) $\frac{bc}{\alpha^2} + \frac{ca}{\beta^2} + \frac{ab}{\gamma^2} = 1$. (iv) $ax^2 + by^2 + cz^2 = abc$.

[*Use Notes of Arts. 13·14 and 13·15.*]

ANSWERS

15. $r = 4$; $R = 8\frac{1}{8}$.

চতুর্দশ অধ্যায়

লগারিদ্‌ম্ (Logarithms)

14·1. লগারিদ্‌ম্-এর সংজ্ঞা :

একটি নির্দিষ্ট রাশির যে ঘাত অপর একটি নির্দিষ্ট রাশির সমান, সেই ঘাতের সূচককে (index of the power) বলা হয় দ্বিতীয় রাশির 'লগারিদ্‌ম্', যাহার নিধান (base) হইবে প্রথম রাশি।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, $a^x = \mathrm{N}$ হইলে, x হইতেছে সেই ঘাত যাহার ক্রিয়ার ফলে a (যাহাকে বলা হয় নিধান) N-এ পরিবর্তিত হইবে। অতএব, সংজ্ঞানুসারে x হইতেছে N-এর লগারিদ্‌ম্ যাহার নিধান a ; ইহা সাধারণতঃ, $x = \log_a \mathrm{N}$ রূপে লিখিত হয়।

$2^3 = 8$ বলিয়া $\log_2 8 = 3$; অর্থাৎ 3 হইতেছে সেই ঘাত যাহার ক্রিয়ার ফলে 2 পরিবর্তিত হইবে 8-এ। পুনরায় $3^4 = 81$ বলিয়া $\log_3 81 = 4$; ইত্যাদি।

সূচক-সম্বলিত যে-কোন ফলাফল লগারিদ্‌ম্-এর সাহায্যে এবং বিপরীতক্রমে লগারিদ্‌ম্-সম্বলিত যে-কোন ফলাফল সূচকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, $p^q = r$ হইলে, $\log_p r = q$

$m^n = z^k$ হইলে, $n = \log_m (z^k)$

বা, $k = \log_z (m^n)$.

অনুরূপভাবে, $\log_y x = z$ হইলে, $y^z = x$.

মনে রাখিতে হইবে যে, একই সংখ্যার লগারিদ্‌ম্-এর নিধান বিভিন্ন হইলে উহাদের মানও বিভিন্ন হইবে ; যেমন, 2-এর 6 ঘাত, 4-এর 3 ঘাত বা 8-এর 2 ঘাত প্রত্যেকেই 64-এর সমান ; অতএব $\log_2 64 = 6$, $\log_4 64 = 3$, এবং $\log_8 64 = 2$. অতএব, নিধানের সঠিক উল্লেখ না থাকিলে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ সম্পূর্ণ অর্থহীন হইবে।

14·2. বিশেষ ফলাফল :

বীজগণিত হইতে আমরা জানি যে, a কোন বাস্তব সসীম (শূন্য ব্যতীত) রাশি হইলে $a^0 = 1$; অতএব, $\log_a 1 = 0$. অর্থাৎ, ভাষায় প্রকাশ করিলে

(i) **1-এর শূন্য ব্যতীত যে-কোন সসীম নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ শূন্য হইবে।**

পুনরায়, a যে-কোন রাশি হইলে $a^1=a$; $\log_a a=1$.

অর্থাৎ, (ii) **কোন সংখ্যার সম-নিধানবিশিষ্ট লগারিদ্‌ম্ 1 হইবে।**

দ্রষ্টব্য 1. $a^x=0$ হইলে, $x=-\infty$, যখন $a>1$

বা, $x=+\infty$, যখন $a<1$.

অতএব, $\log_a 0=-\infty$, যদি $a>1$ হয়,

$=+\infty$, যদি $a<1$ হয়।

অর্থাৎ, শূন্যের 1 অপেক্ষা বৃহত্তর নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ অসীম ঋণরাশি এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ অসীম ধনরাশি হইবে।

দ্রষ্টব্য 2. a এবং n বাস্তব ধনরাশি হইলে, $a^x=-n$ সমীকরণটি x-এর কোন বাস্তব মানের সাহায্যে সমাধান করা যায় না (এক্ষেত্রে কেবলমাত্র a^x-এর মুখ্যমান* ধরা হইয়াছে); সুতরাং, **একটি ঋণরাশির লগারিদ্‌ম্ (যেক্ষেত্রে নিধান বাস্তব ধনরাশি) অবশ্যই অস্তিত্বহীন বা অবাস্তব হইবে।**

14·3. লগারিদ্‌ম্-সংশ্লিষ্ট মৌলিক সূত্রাবলী :

লগারিদ্‌ম্-এর সংজ্ঞা হইতে দেখা যায় যে, লগারিদ্‌ম্ সূচকের অন্য একটি রূপমাত্র। আমরা জানি যে, a, x, y বাস্তব রাশি হইলে,

(i) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

(ii) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

এবং (iii) $(a^x)^y = a^{xy}$.

বীজগণিতে সূচক নিয়মের এই তিনটি মৌলিক সূত্রের অনুরূপ লগারিদ্‌ম্-এরও তিনটি মৌলিক সূত্র পাওয়া যায়। সূত্রগুলি নিম্নে দেওয়া হইল :

(i) $\mathbf{\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n.}$

অর্থাৎ দুইটি সংখ্যার গুণফলের লগারিদ্‌ম্ উক্ত সংখ্যা দুইটির পৃথক্‌ভাবে গৃহীত লগারিদ্‌ম্-এর সমষ্টির সমান।

---

* মুখ্য মানের সংজ্ঞার জন্য Higher Trigonometry by Das & Mukherjee দ্রষ্টব্য।

প্রমাণ : মনে করি, $\log_a m = x$, $\log_a n = y$ এবং $\log_a (mn) = z$.

অতএব, সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m$, $a^y = n$ এবং $a^z = mn = a^x . a^y = a^{x+y}$.

$$\therefore \quad z = x + y.$$

অর্থাৎ, $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n.$

অনুসিদ্ধান্ত : অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\log_a (m.n.p\ldots) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \cdots\cdots$$

(ii) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$

অর্থাৎ, দুইটি সংখ্যার ভাগফলের লগারিদম্ উক্ত সংখ্যাদ্বয়ের লগারিদম্-এর অন্তরের সমান (লবের লগারিদম্ বিযুক্ত হরের লগারিদম্)।

প্রমাণ : মনে করি, $\log_a m = x$, $\log_a n = y$, এবং $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = z$.

অতএবং সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m$, $a^y = n$, এবং $a^z = \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

$$\therefore \quad z = x - y.$$

অর্থাৎ, $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$

(iii) $\log_a (m)^n = n \log_a m.$

অর্থাৎ, একটি সংখ্যার ঘাতের লগারিদম্, ঘাত এবং উক্ত সংখ্যার লগারিদম্-এর গুণফলের সমান হইবে।

প্রমাণ : $\log_a m = x$ এবং $\log_a (m)^n = z$ ধরিলে, সংজ্ঞানুসারে

$$a^x = m, \; a^z = m^n = (a^x)^n = a^{nx}.$$

$$\therefore \quad z = nx.$$

অর্থাৎ, $\log_a (m)^n = n \log_a m.$

14·4. নিধান-পরিবর্তন (change of base).

সংখ্যাগুলির কোনও নির্দিষ্ট নিধানযুক্ত লগারিদম্ দেওয়া থাকিলে, যে-কোনও সংখ্যার অপর যে-কোন নিধানযুক্ত লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়। সংশ্লিষ্ট সূত্রটি এই :

$$\mathbf{\log_a m = \log_b m \times \log_a b.}$$

প্রমাণ : $\log_a m = x$, $\log_b m = y$, এবং $\log_a b = z$ কল্পনা করিলে

$$a^x = m,\ b^y = m,\ a^z = b.$$

$$\therefore \quad a^x = m = b^y = (a^z)^y = a^{yz}. \quad \therefore \ x = yz.$$

অর্থাৎ, $\log_a m = (\log_b m) \times (\log_a b)$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. উপরোক্ত ফলাফলে $m = a$ ধরিলে, প্রমাণ করা হয় যে,

$$(\log_b a) \times (\log_a b) = 1. \qquad [\because \ \log_a a = 1]$$

এই সূত্রটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় বলিয়া ইহার একটি নিরপেক্ষ প্রমাণ দেওয়া হইল :—

মনে করি, $\log_b a = x$ এবং $\log_a b = y$. অতএব, $b^x = a$ এবং $a^y = b$.

$$\therefore \quad a = b^x = (a^y)^x = a^{xy}. \quad \therefore \ xy = 1.$$

$$\therefore \quad \log_b a \times \log_a b = 1.$$

অর্থাৎ, $$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. উপরোক্ত অনুচ্ছেদের সূত্রটি অনুসিদ্ধান্ত 1-এর সাহায্যে আমরা নিম্নলিখিতরূপে লিখিতে পারি :

$$\log_a m = \log_b m / \log_b a.$$

অতএব, m এবং a উভয়ের b-নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ জানা থাকিলে m-এর a নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করা যায়।

14·5. সাধারণ লগারিদ্‌ম্ (Common system of logarithms).

প্রায় সমস্ত ব্যবহারিক ক্ষেত্রে আঙ্কিক গণনার জন্য যে সমস্ত লগারিদ্‌ম্-এর প্রয়োগ হয়, তাহাদের নিধান সাধারণতঃ 10 ধরিয়া লওয়া হয়। যে সকল লগারিদ্‌ম্-এর নিধান 10 তাহাদিগকে সাধারণ (common) লগারিদ্‌ম্ পদ্ধতির অন্তর্ভুক্ত বলা হয়। অনু. 14·6-এর I এবং II উপপাদ্যে ইহাদের সুবিধা সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

দ্রষ্টব্য। উচ্চতর গণিতে তাত্ত্বিক (theoretical) আলোচনার জন্য নিধান ধরা হয় অন্য একটি অমেয় রাশি e যাহার মান 2·718··· (এই সম্পর্কে বীজগণিতে আলোচনা আছে)। এই সমস্ত লগারিদ্‌ম্‌কে বলা হয় প্রাকৃত বা নেপিরীয় লগারিদ্‌ম্ (Natural or Naperian logarithm).

লগারিদ্‌ম্ শ্রেণীর (logarithmic series) সাহায্যে বিভিন্ন সংখ্যার প্রাকৃত লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করা যায় (বীজগণিতে ইহার প্রণালী প্রদর্শিত হইয়াছে)।

এই সমস্ত লগারিদম্‌কে গুণক $\frac{1}{\log_e 10}$-এর সাহায্যে সাধারণ লগারিদম্‌-এ পরিবর্তিত করা যায়। এই গুণককে বলা হয় সাধারণ পদ্ধতির লগারিদম্‌-এর মাপাঙ্ক (modulus).

অতঃপর আমরা কেবলমাত্র সাধারণ লগারিদম্‌-এরই উল্লেখ করিব এবং নিধান উল্লেখ না থাকিলে উহাকে 10 ধরিতে হইবে।

14·6. সাধারণ লগারিদম্‌-এর পূর্ণক (Characteristic) এবং অংশক (Mantissa).

মাত্র অল্প কয়েকটি ক্ষেত্রে লগারিদম্‌ অখণ্ড সংখ্যা হইতে পারে কিন্তু অধিকাংশ ক্ষেত্রেই কোন সংখ্যার লগারিদম্‌ আংশিকভাবে অখণ্ড এবং আংশিকভাবে সামান্য বা দশমিক ভগ্নাংশ হইবে।

সংজ্ঞা। কোন সংখ্যার লগারিদম্‌-এর **অখণ্ড অংশকে "পূর্ণক"** এবং **দশমিক অংশকে "অংশক"** বলা হয়।

কোন সংখ্যার লগারিদম্‌ ঋণসংখ্যা এবং আংশিকভাবে পূর্ণসংখ্যা ও আংশিকভাবে দশমিক ভগ্নাংশ হইলে, অংশক অথবা দশমিক অংশকে সর্বদাই ধনসংখ্যা রাখিয়া পূর্ণককে পরিবর্তিত করিতে হয়। অতএব, কোন সংখ্যার লগারিদম্‌-এর অংশক সর্বদাই ধনাত্মক হইবে। যেমন, কোন সংখ্যার লগারিদম্‌ $-2·3$ হইলে উহাকে $-3+·7$-এর সমান লেখা যায় ও তখন -3 কে বলা হয় পূর্ণক এবং $·7$-কে বলা হয় অংশক ($-·3$ নয়)। $-3+·7$-কে সংক্ষেপে $\bar{3}·7$ লেখা হয়।

উপপাদ্য I. (i) 1অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্‌-এর পূর্ণক সর্বদাই ধনাত্মক এবং সংখ্যাটির অখণ্ডাংশের অঙ্কের সংখ্যা হইতে এক কম;

(ii) 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনসংখ্যার লগারিদম্‌-এর পূর্ণক সর্বদা ঋণাত্মক হইবে এবং সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে যে কয়টি শূন্য থাকিবে, পূর্ণকের আঙ্কিক মান তাহা অপেক্ষা এক বেশী হইবে।*

(i) মনে করি যে, সংখ্যাটি এক অপেক্ষা বৃহত্তর।

---

* 10-এর এমন কোন বাস্তব ঘাত নির্ণয় করা যায় না যাহার ফলে মান ঋণাত্মক হইবে। অতএব ঋণসংখ্যার লগারিদম্‌ সম্পূর্ণ কাল্পনিক হইবে। [অনুঃ 14·2-এর দ্রষ্টব্য 2.]

যে-কোন সংখ্যার অখণ্ড অংশ এক অঙ্কের হইলে (যেমন, 7·209) সংখ্যাটি 1 এবং 10-এর মধ্যবর্তী হইবে।

এক্ষণে $10^0 = 1$ এবং $10^1 = 10$.

অতএব, $10^x = 7·209$ হইলে, x শূন্য অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। অতএব, log 7·209-এর মান 0 এবং 1-এর মধ্যবর্তী হইবে অর্থাৎ ইহার রূপ হইবে 0·… এবং পূর্ণক হইবে 0।

অনুরূপভাবে, 53·0528 এই ধরণের সংখ্যাগুলি (যাহাদের অখণ্ড অংশ দুই অঙ্কের সংখ্যা) 10 এবং 100 অর্থাৎ 10^1 এবং 10^2-এর মধ্যবর্তী হইবে। অতএব, 10-এর যে ঘাত 53·0528 হইবে, সেই ঘাত 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে অর্থাৎ log 53·0528-এর মানের রূপ হইবে 1·… এবং পূর্ণক হইবে এক।

log 10 = 1, এবং, 10 সংখ্যাটিও দুই অঙ্কের সংখ্যার শ্রেণীভুক্ত।

অনুরূপভাবে, যে সমস্ত সংখ্যার অখণ্ড অংশ n অঙ্কের, তাহারা 10^{n-1} (যাহা n অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা) এবং 10^n (যাহা $n+1$ অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা)-এর মধ্যবর্তী হইবে অর্থাৎ তাহাদের লগারিদম্-এর মান হইবে $(n-1)+$ কোন সামান্য ভগ্নাংশ। অতএব, এই সমস্ত ক্ষেত্রে পূর্ণক $(n-1)$-এর সমান।

(ii) মনে করি যে সংখ্যাটি ধনাত্মক এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (অর্থাৎ 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী।)

আমরা লক্ষ্য করি যে,

$$10^0 = 1$$
$$10^{-1} = \tfrac{1}{10} = ·1$$
$$10^{-2} = \tfrac{1}{100} = ·01$$
$$10^{-3} = \tfrac{1}{1000} = ·001$$
$$10^{-4} = \tfrac{1}{10000} = ·0001 \text{ ; ইত্যাদি।}$$

দশমিক বিন্দুর ঠিক পরবর্তী অঙ্ক শূন্য নয় এইরূপ 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যা (যথা, ·3015), ·1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। অতএব, 10-এর যে ঘাত এই প্রকারের সংখ্যা হইবে সেই ঘাতের সূচক-সংখ্যা −1 এবং 0-এর মধ্যবর্তী, অর্থাৎ −1 + এক সামান্য ভগ্নাংশের সমান হইবে। অতএব, এই সমস্ত সংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণক −1-এর সমান হইবে।

দশমিক বিন্দুর ঠিক পরবর্তী মাত্র একটি অঙ্ক শূন্য এইরূপ সংখ্যা, (যেমন, ·0785005) ·01 এবং ·1 অর্থাৎ 10^{-2} এবং 10^{-1}-এর মধ্যবর্তী।

অতএব, $10^x = \dot{0}785005$ হইলে, x অবশ্যই -1 এবং -2-এর মধ্যবর্তী হইবে, অর্থাৎ x-এর রূপ হইবে $-1\cdot\ldots\ldots$; x-এর দশমিক অংশ ধনাত্মক কল্পনা করিলে x-এর রূপ হইবে $-2+\cdot\ldots\ldots$। সুতরাং, x-এর অখণ্ড অংশ log ˙0785005-এর পূর্ণক -2 হইবে।

অনুরূপভাবে, ˙01 এবং ˙001 অর্থাৎ 10^{-2} এবং 10^{-3}-এর মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলির প্রারম্ভের দশমিক বিন্দুর পর দুইটি শূন্য থাকিবে এবং এই সকল সংখ্যার লগারিদম্ -2 এবং -3-এর মধ্যবর্তী হইবে, অর্থাৎ লগারিদম্-এর রূপ হইবে $-2\cdot\ldots\ldots = -3+\cdot\ldots\ldots$; অতএব, পূর্ণক হইবে -3 ; ইত্যাদি।

উপপাদ্য II. যে সমস্ত সংখ্যাগুলি একই ক্রমে সজ্জিত অনুরূপ অঙ্ক দ্বারা গঠিত এবং যাহাদের মধ্যে পার্থক্য কেবলমাত্র দশমিক বিন্দুর অবস্থানে, সেই সমস্ত সংখ্যার লগারিদম্-এর অংশগুলি অভিন্ন হইবে।

একটি উদাহরণ দ্বারা ইহা স্পষ্ট হইবে। আমরা 835107, 835107000, 83˙5107, ˙835107, ˙000835107 এবং 8351˙07—এই সংখ্যাগুলির লগারিদম্ আলোচনা করি।

এক্ষণে,
$$\begin{aligned}\log 835107000 &= \log (835107 \times 1000)\\ &= \log 835107 + \log 1000\\ &= \log 835107 + 3.\end{aligned}$$

পুনরায়,
$$\begin{aligned}\log 83\cdot5107 &= \log \frac{835107}{10000}\\ &= \log 835107 - \log 10000\\ &= \log 835107 - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \cdot835107 &= \log \frac{835107}{1000000} = \log 835107 - \log 1000000\\ &= \log 835107 - 6.\end{aligned}$$

$$\log \cdot000835107 = \log \frac{835107}{10^9} = \log 835107 - 9$$

$$\log 8351\cdot07 = \log \frac{835107}{100} = \log 835107 - 2.$$

এইখানে, যে-কোন সংখ্যার লগারিদম্ ও log 835107-এর মধ্যে পার্থক্য একটি পূর্ণ সংখ্যার। সুতরাং, উক্ত সংখ্যাগুলির অংশক log 835107-এর অংশকের সহিত সমান হইবে।

বস্তুতঃ, একই ক্রমে সজ্জিত অনুরূপ অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যার পার্থক্য মাত্র দশমিক বিন্দুর অবস্থানজনিত হইলে, উহাদের অনুপাত 10-এর অখণ্ড ঘাতের সমান হইবে এবং ইহাদের লগারিদম্-এর পার্থক্য দেখা যাইবে কেবল পূর্ণকের মধ্যে।

উপরের উপপাদ্য দুইটি হইতে প্রমাণিত হয় যে, (i) **কোন সংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণক কেবলমাত্র পর্য্যবেক্ষণের সাহায্যে নির্ণয় করা যায় এবং (ii) অংশক নির্ণয় করিতে কেবলমাত্র সংখ্যাটি যে অঙ্কগুলির দ্বারা গঠিত তাহা লক্ষ্য করিতে হইবে, দশমিক বিন্দুর অবস্থান লক্ষ্য না করিলে কোন ক্ষতি হইবে না।**

অতএব, লগারিদম্-এর তালিকায় কেবলমাত্র অংশক দেওয়া থাকিলেই চলে এবং কার্য্যতঃ তাহাই দেওয়া থাকে। ইহাই সাধারণ লগারিদম্-এর বিশেষত্ব এবং সুবিধা।

14·7. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Simplify* : $\log \dfrac{\sqrt[4]{5}\,.\,\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{(18\,.\,\sqrt{2})}}$, *and find its value, given* $\log 2 = \cdot 30103$ *and* $\log 3 = \cdot 4771213$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \log \frac{5^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{10}}}{\left(18\,.\,2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \log \frac{10^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{4}}\left(2\,.\,3^2\,.\,2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \log \frac{10^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{4}}\,.\,2^{\frac{1}{3}}\,.\,3^{\frac{2}{3}}\,.\,2^{\frac{1}{6}}} = \log \frac{10^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{13}{20}} 3^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \log 10^{\frac{1}{4}} - \log\left(2^{\frac{13}{20}} \times 3^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4} \log 10 - \left(\log 2^{\frac{13}{20}} + \log 3^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4} \log 10 - \tfrac{13}{20} \log 2 - \tfrac{2}{3} \log 3$$

$$= \tfrac{1}{4}\,.\,1 - \tfrac{13}{20}(\cdot 30103) - \tfrac{2}{3}(\cdot 4771213)$$

$$= \cdot 25 - \cdot 1956695 - \cdot 3180809$$

$$= -1 + \cdot 7362496 = \bar{1}\cdot 7362496.$$

দ্রষ্টব্য। $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$; অতএব, log 5-এর মান log 2-এর মান হইতে নির্ণয় করা যায়।

Ex. 2. *Prove that*

$$7 \log \tfrac{10}{9} - 2 \log \tfrac{25}{24} + 3 \log \tfrac{81}{80} = \log 2.$$

বাম পক্ষ $= \log \left(\frac{10}{9}\right)^7 - \log \left(\frac{25}{24}\right)^2 + \log \left(\frac{81}{80}\right)^3$

$$= \log \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^7 \times \left(\frac{81}{80}\right)^3}{\left(\frac{25}{24}\right)^2} = \log \left\{\left(\frac{10}{3^2}\right)^7 \times \left(\frac{3^4}{10 \times 2^3}\right)^3 \times \left(\frac{3 \times 2^3 \times 2^2}{10^2}\right)^2\right\}$$

$$= \log \left(\frac{10^7}{3^{14}} \times \frac{3^{12}}{10^3 \times 2^9} \times \frac{3^2 \times 2^{10}}{10^4}\right) = \log 2.$$

বিকল্প প্রমাণ :

বাম পক্ষ $= 7(\log 10 - \log 9) - 2(\log 25 - \log 24) + 3(\log 81 - \log 80)$

$= 7\{\log(5 \times 2) - \log 3^2\} - 2\{\log 5^2 - \log(3 \times 2^3)\} + 3\{\log 3^4 - \log(5 \times 2^4)\}$

$= 7\{\log 5 + \log 2 - 2\log 3\} - 2\{2\log 5 - \log 3 - 3\log 2\} + 3\{4\log 3 - \log 5 - 4\log 2\}$

$= \log 2.$

Ex. 3. *Find the number of digits in* 4^{15}, *having given* $\log 2 = {}^{\cdot}30103$.

$$\log 4^{15} = \log 2^{30} = 30 \log 2 = 30 \times {}^{\cdot}30103 = 9{}^{\cdot}0309.$$

অতএব, $\log 4^{15}$-এর পূর্ণক 9 বলিয়া, 4^{15} দশ অঙ্কের সংখ্যা।

Ex. 4. *Find approximately the* 7^{th} *root of* $35{}^{\cdot}28$, *having given* $\log 2 = {}^{\cdot}30103$, $\log 3 = {}^{\cdot}4771213$, $\log 7 = {}^{\cdot}8450980$ *and* $\log 1197{}^{\cdot}342 = 3{}^{\cdot}0782184$.

মনে করি, $x = (35{}^{\cdot}28)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{7^2 \times 3^2 \times 2^3}{10^2}\right)^{\frac{1}{7}}.$

$\therefore \quad \log x = \frac{1}{7}[2\log 7 + 2\log 3 + 3\log 2 - 2\log 10]$

$= \frac{1}{7}[2 \times {}^{\cdot}8450980 + 2 \times {}^{\cdot}4771213 + 3 \times {}^{\cdot}30103 - 2]$

$= {}^{\cdot}0782184.$ (প্রায়)

এক্ষণে $\log 1197{}^{\cdot}342 = 3{}^{\cdot}0782184$ বলিয়া,

$\log 1{}^{\cdot}197342 = {}^{\cdot}0782184$ (যেহেতু উভয়ের অংশক সমান, কিন্তু 1 অঙ্কের সংখ্যা বলিয়া পূর্ণক শূন্য)

$\therefore \quad x = 1{}^{\cdot}197342.$ (আসন্ন মান)।

Ex. 5. *Obtain an approximate numerical solution of* $2^x . 3^{2x} = 100$, *having given* $log\ 2 = \cdot30103$, $log\ 3 = \cdot47712$.

$$2^x . 3^{2x} = 100 = 10^2, \quad \therefore \log (2^x . 3^{2x}) = \log 10^2$$

অর্থাৎ, $x \log 2 + 2x \log 3 = 2 \log 10 = 2$.

$$\therefore \quad x = \frac{2}{\log 2 + 2 \log 3} = \frac{2}{\cdot30103 + 2 \times \cdot47712}$$
$$= 1\cdot5933 \quad (\text{প্রায়})$$

Ex. 6. *If* $y = a^{\frac{1}{1-log\ x}}$, $z = a^{\frac{1}{1-log\ y}}$, *then* $x = a^{\frac{1}{1-log\ z}}$, *all the logarithms being calculated to the base a.*

$$\because \quad y = a^{\frac{1}{1-\log x}}, \qquad \therefore \quad \log_a y = \frac{1}{1 - \log_a x}. \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\because \quad z = a^{\frac{1}{1-\log y}}, \qquad \therefore \quad \log_a z = \frac{1}{1 - \log_a y} \qquad \cdots \quad (2)$$

(2) হইতে আমরা পাই $\log_a y = 1 - \frac{1}{\log_a z} = \frac{\log_a z - 1}{\log_a z}$.

অতঃপর (1) -হইতে,

$$\log_a x = 1 - \frac{1}{\log_a y} = 1 - \frac{\log_a z}{\log_a z - 1} = \frac{-1}{\log_a z - 1} = \frac{1}{1 - \log_a z}.$$

$$\therefore \quad x = a^{\frac{1}{1-\log z}}.$$

Ex. 7. *Evaluate* $log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots to\ \infty}}}$ *assuming it to have a definite value.*

মনে করি, $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \cdots \text{to } \infty}}}$

$\therefore \quad x = \sqrt{2x}$ বা $x^2 - 2x = 0$. কিন্তু $x \neq 0$. $\therefore x = 2$.

এখন প্রদত্ত রাশি $= \log_2 x = \log_2 2 = 1$.

Ex. 8. *If* $a^m = b^n$, *show that* $n\ log_a\ x = m\ log_b\ x$.

মনে করি, $\log_a x = a'$ এবং $\log_b x = b'$.

$\therefore \quad a^{a'} = x$ এবং $b^{b'} = x$. সুতরাং, $a^{a'} = b^{b'}$.

উভয় পক্ষের লগারিদম্ লইলে, $a' \log a = b' \log b$.

$$\text{বা,} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{\log b}{\log a} \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন প্রদত্ত সমীকরণ $a^m = b^n$-এর উভয় পক্ষের লগারিদম্ লইলে আমরা পাই $m \log a = n \log b$.

$$\therefore \quad \frac{m}{n} = \frac{\log b}{\log a} \qquad \cdots \quad (2)$$

অতএব (1) এবং (2) হইতে আমরা জানি যে, $\frac{a'}{b'} = \frac{m}{n}$.

অর্থাৎ, $\dfrac{\log_a x}{\log_b x} = \dfrac{m}{n}$. $\therefore \; n \log_a x = m \log_b x$.

Ex. 9. *Prove that*

(i) $x^{\log y} = y^{\log x}$.

(ii) $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$.

(i) $\log(x^{\log y}) = \log y \log x = (\log x) \cdot \log y = \log(y^{\log x})$

$\therefore \; x^{\log y} = y^{\log x}$.

(ii) মনে করি,

$$P = x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y}.$$

$$\therefore \; \log P = (\log y - \log z)\log x + (\log z - \log x)\log y + (\log x - \log y)\log z = 0.$$

$$\therefore \; P = 1.$$

অর্থাৎ, $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$.

Ex. 10. *If* $a^{3-x} b^{5x} = a^{x+5} b^{3x}$, *then* $x \log\left(\frac{b}{a}\right) = \log a$.

[C. U. 1937]

$\because \; a^{3-x} b^{5x} = a^{x+5} b^{3x}$, উভয় পক্ষের লগারিদম্ লইলে,

$(3-x)\log a + 5x \log b = (x+5)\log a + 3x \log b$

বা, $x[\log a + 3\log b + \log a - 5\log b] = 3\log a - 5\log a$

বা, $x[2\log a - 2\log b] = -2\log a$

বা, $x(\log b - \log a) = \log a$. $\therefore \; x \log \frac{b}{a} = \log a$.

দ্রষ্টব্য। এইপ্রকার রূপবিশিষ্ট সমীকরণকে সূচক সমীকরণ (Exponential equation) বলা হয়। Ex. 5. এরও এইরূপ।

Examples XIV(a)

[*Use the values* : $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 4771213$, $\log 7 = \cdot 8450980$ *when required*]

1. Find the logarithm of

(i) 1728 to the base $2\sqrt{3}$, (ii) $\cos^3 a$ to the base $\sec a$.

2. Find $\log_{10} 10000$.

3. Show that $\log_{10} 2$ lies between $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$. [C. U. 1926]

4. Prove that

(i) $\log_a m \times \log_b n = \log_b m \times \log_a n$.

(ii) $\log_2 \log_2 \log_2 16 = 1$.

5. If $\log_e m + \log_e n = \log_e (m+n)$, find m as a simple function of n.

6. Prove that if a series of numbers be in G.P., their logarithms are in A.P.

7. Prove that $2 \log a + 2 \log a^2 + 2 \log a^3 + \cdots\cdots + 2 \log a^n$
$= n(n+1) \log a$.

8. If x is positive and less than unity, show that $\log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \log(1+x^8) + \cdots$ to $\infty = -\log(1-x)$.

9. Simplify

(i) $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(ii) $\dfrac{\log \sqrt{27} + \log 8 - \log \sqrt{1000}}{\log 1 \cdot 2}$.

10. Find $\log (\cdot 0025)^{\frac{1}{3}}$ and $\log \left(\frac{5}{72}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

11. Prove that

(i) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$.

(ii) $\log_a x = \log_b x \times \log_c b \times \log_d c \cdots \times \log_n m \times \log_a n$.

12. Show that

(i) $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$.

(ii) $7 \log \frac{15}{16} + 6 \log \frac{8}{3} + 5 \log \frac{2}{5} + \log \frac{32}{25} = \log 3$.

13. Extract the fifth root of 84, having given

$\log 2425805 = 6 \cdot 3848559$.

14. Calculate $(\cdot 0020736)^{\frac{1}{7}}$, having given

$$\log 41369 = 4\cdot 6166750.$$

15. Simplify

(i) $\log \sqrt[7]{\dfrac{8^{\frac{1}{5}} \times 14^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{72} \times \sqrt[5]{60}}}$.

(ii) $\sqrt[3]{\dfrac{7\cdot 2 \times 6\cdot 3}{62\cdot 5}}$, having given

$$\log 898665 = 5\cdot 9535977.$$

16. Find the value of $64\{1 - (1\cdot 05)^{-20}\}$, having given

$$\log 24121 = 4\cdot 382394.$$

17. Find the number of digits in (i) 2^{40}, (ii) 3^{11}, (iii) $(540)^9$.

18. Find the number of zeros after the decimal point before the first significant digit in the expressions :

(i) $(\cdot 024)^{15}$. (ii) $\left(\dfrac{1}{4\cdot 05}\right)^8$. (iii) $\left(\cdot 0\dot{2}5\dot{9}\right)^{50}$.

19. Solve the equations

(i) $3^x = 2$. (ii) $3^{x-4} = 7$. (iii) $5^{6x} \div 7^{x+2} = 3^{2x-3}$.

(iv) $\left.\begin{array}{l} 2^x = 3^y \\ 2^{y+1} = 3^{x-1} \end{array}\right\}$ (v) $\left.\begin{array}{l} 7^{x+y} \times 3^{2x+y} = 9 \\ 3^{x-y} \div 2^{x-2y} = 3^x \end{array}\right\}$

20. (i) If $\log(x^2 y^3) = a$, $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = b$, find $\log x$ and $\log y$.

(ii) If $a^2 + b^2 = 7ab$, show that

$$\log\{\tfrac{1}{3}(a+b)\} = \tfrac{1}{2}(\log a + \log b).$$

21. If $\dfrac{\log x}{y - z} = \dfrac{\log y}{z - x} = \dfrac{\log z}{x - y}$, show that $x^x y^y z^z = 1$.

22. Why is $\log(1 + 2 + 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$?

23. If $a, b, c, \ldots\ldots$ be in G.P., show that

$$\log_a x, \log_b x, \log_c x \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ are in H.P.}$$

24. If $xy^{l-1} = a$, $xy^{m-1} = b$, $xy^{n-1} = c$, prove that

$$(m - n)\log a + (n - l)\log b + (l - m)\log c = 0.$$

25. If $\dfrac{x(y + z - x)}{\log x} = \dfrac{y(z + x - y)}{\log y} = \dfrac{z(x + y - z)}{\log z}$, show that

$$y^z z^y = z^x x^z = x^y y^x.$$

ANSWERS

1. (i) 6. (ii) -3. **2.** -2. **5.** $\frac{n}{n-1}$. **9.** (i) 1. (ii) $1\frac{1}{2}$.

10. $\bar{1}$·1173942, ·3861209. **13.** 2·425805. **14.** ·41369.

15. (i) $\bar{1}$·8969092. (ii) ·898665. **16.** 39·879.

17. (i) 13. (ii) 6. (iii) 25. **18.** (i) 24. (ii) 4. (iii) 79.

19. (i) $\frac{\log 2}{\log 3}$, *i.e.*, ·63....... (ii) $4+\frac{\log 7}{\log 3}$, *i.e.*, 5·77...

(iii) $\frac{2\log 7-3\log 3}{6\log 5-\log 7-2\log 3}$, *i.e.*, ·108...

(iv) $x=\frac{\log 3}{\log 3-\log 2}=2·71$ nearly, $y=\frac{\log 2}{\log 3-\log 2}=1·71$ nearly.

(v) $\frac{2b(2a-b)}{5ab+3ac-2b^2-bc}$ and $\frac{2ab}{5ab+3ac-2b^2-bc}$,

where $a=\log 2$, $b=\log 3$, $c=\log 7$.

20. (i) $\log x=\frac{a+3b}{5}$, $\log y=\frac{a-2b}{5}$.

14·8. লগারিদম্ এবং কোণানুপাতের তালিকা।

পাঁচ আসন্ন দশমিক স্থান পর্যন্ত কয়েকটি তালিকা পুস্তকের শেষে সন্নিবিষ্ট করা হইয়াছে। নিম্নে তালিকাগুলির বিষয়বস্তু ব্যাখ্যা করা হইতেছে।

প্রথম তালিকায় 1 হইতে 10,000 সংখ্যাগুলির (অর্থাৎ যে সমস্ত সংখ্যা চার বা তাহার কম অঙ্কবিশিষ্ট তাহাদের) লগারিদম্-এর অংশক দেওয়া হইয়াছে (দশমিক বিন্দু দেওয়া হয় নাই)। অনু. 14·6-এর নিয়ম অনুযায়ী পূর্ণক নির্ণয় করিয়া নির্ণেয় সংখ্যার লগারিদম্ বাহির করিতে হইবে। তালিকার প্রধান অংশে দেওয়া হইয়াছে তিন অঙ্কের সংখ্যার লগারিদম্-এর অংশক এবং পার্শ্বস্থ অংশে সন্নিবিষ্ট হইয়াছে চতুর্থ অঙ্কের জন্য মধ্যক অন্তর (mean difference)। অতএব, চারি অঙ্কের সংখ্যার লগারিদম্ নির্ণয় করিতে হইলে তালিকার প্রধান অংশ হইতে প্রথম তিন অঙ্কের সংখ্যার অংশকের সহিত চতুর্থ অঙ্কের সংশ্লিষ্ট মধ্যক অন্তর যোগ করিতে হইবে। মধ্যক অন্তরের বৃদ্ধির ক্ষেত্রে তালিকাতে কেবল সার্থক (significant) অঙ্কগুলি লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে; ইহার বামে প্রয়োজনমত শূন্য বসাইয়া পাঁচ অঙ্কের দশমিকে পরিবর্তিত করিতে হইবে (কারণ এইক্ষেত্রে তালিকাটিতে পাঁচ দশমিক পর্যন্ত আছে)। যথা: মধ্যক অন্তরের তালিকায় 24 লিখিত থাকিলে উহাকে ধরিতে হইবে ·00024;

উদাহরণস্বরূপ log 2·697 এর মান নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে মূল তালিকা হইতে log 269 এর অংশক নির্ণয় করি ; উহা হইবে ·42975 ; ইহাদের একই সারি হইতে দেখা যায় যে, 7-এর জন্য মধ্যক অন্তর 115 অর্থাৎ log 2697 এর অংশক হইবে ·42975 + ·00115 অর্থাৎ ·43090. পুনরায় log 2·697-এর পূর্ণক শূন্য, অর্থাৎ log 2·697 এর মান 0·43090.

দ্বিতীয় তালিকায় আছে 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণগুলির সাইন ও কোসাইনের মান (এই সমস্ত সাইন ও কোসাইনকে স্বাভাবিক সাইন ও কোসাইন [Natural sines and Natural cosines] বলিয়া অভিহিত করা হইয়া থাকে) ; সাইনের মান লিখিত হইয়াছে উপরের বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া উপর হইতে নীচে এবং বামদিক হইতে ডানদিকে ; আর কোসাইন লিখিত হইয়াছে নীচের দক্ষিণদিক হইতে আরম্ভ করিয়া উপরের দিকে এবং ডানদিক হইতে বামদিকে। তালিকাটি এমনভাবে সাজানো হইয়াছে যে, যে-কোন কোণের সাইন উহার পূরক কোণের কোসাইন এবং ইহার ফলে একই তালিকাতে সাইন এবং কোসাইন উভয় মানই লিপিবদ্ধ করা সম্ভব হইয়াছে। মূল তালিকাতে সাইন বা কোসাইন 10′ ব্যবধানে লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে এবং পার্শ্বস্থ মধ্যক অন্তর তালিকায় প্রতি 1′ ব্যবধানে সাইন বা কোসাইনের ব্যবধান লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে। মনে রাখিতে হইবে যে, কোণ যখন 0° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পাইতে থাকে, তখন সাইন ক্রমান্বয়ে 0 হইতে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় এবং কোসাইন ক্রমান্বয়ে 1 হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইতে থাকে বলিয়া, **কোণ বর্ধিত হইলে মধ্যক অন্তর সাইনের ক্ষেত্রে যোগ কিন্তু কোসাইনের ক্ষেত্রে বিয়োগ করিতে হইবে।** অধিকন্তু প্রথম তালিকার ন্যায় মধ্যক অন্তর-তালিকায় কেবলমাত্র সার্থক অঙ্কগুলিই লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে এবং প্রয়োজনমত বামদিকে উপযুক্ত-সংখ্যক শূন্য বসাইয়া **পাঁচ দশমিক স্থান** পূর্ণ করিতে হইবে। যেমন, তালিকার সাহায্যে $\sin 53°23' = ·80212 + ·00052 = ·80264$ এবং $\cos 29°42' = ·86892 - ·00029 = ·86863$.

অনুরূপভাবে, তৃতীয় তালিকার অন্তর্ভুক্ত করা হইয়াছে 0° হইকে 90° পর্যন্ত 1′ ব্যবধানে ট্যানজেণ্ট এবং কো-ট্যানজেণ্টের মান। মধ্যক অন্তরের তালিকার অংকগুলিকে পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত পূর্ণ করিয়া **কোণের বর্ধিত মিনিট সংখ্যার জন্য ট্যানজেণ্টের ক্ষেত্রে যোগ এবং কোট্যানজেণ্টের ক্ষেত্রে বিয়োগ করিতে হইবে।**

চতুর্থ তালিকায় আছে $1'$ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত লগারিদ্মিক সাইন এবং কোসাইন (মধ্যক অন্তর-তালিকা সহযোগে)। θ-র লগারিদ্মিক সাইনের প্রতীক $\mathbf{L \sin \theta}$ এবং উহা $\mathbf{10 + \log \sin \theta}$-র সমান, অনুরূপভাবে θ-র লগারিদ্মিক কোসাইনের প্রতীক $\mathbf{L \cos \theta}$ এবং উহার মান $\mathbf{10 + \log \cos \theta}$; কোণানুপাতের ক্ষেত্রে মনে রাখিতে হইবে যে, 0° হইতে 90° পর্যন্ত সাইন এবং কোসাইনের মান, 0° হইতে 45° পর্যন্ত ট্যানজেণ্টের মান এবং 45° হইতে 90° পর্যন্ত কোট্যানজেণ্টের মান এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; অতএব, এই সমস্ত সংখ্যার লগারিদম্ ঋণরাশি। অতএব, **তালিকাকে ঋণরাশি মুক্ত করিবার জন্য কোণানুপাতের লগারিদম্ তালিকাভুক্ত করিবার পূর্বে উহার সহিত 10 যোগ করিয়া লওয়া হয়।** সুতরাং, তালিকাটি হইতে $\log \sin \theta$ এবং $\log \cos \theta$-র পরিবর্তে $L \sin \theta$ এবং $L \cos \theta$-র মান পাওয়া যায়।

পঞ্চম তালিকায় মধ্যক অন্তর-তালিকা সহযোগে $1'$ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত লগারিদ্মিক ট্যানজেণ্ট ($L \tan \theta = 10 + \log \tan \theta$) এবং লগারিদ্মিক কোট্যানজেণ্ট ($L \cot \theta = 10 + \log \cot \theta$)-এর মান দেওয়া আছে।

14·9. সমানুপাতিক অংশ সম্পর্কীয় তথ্য : (Principle of proportional parts.)

মনে করি যে, প্রথম তালিকা হইতে প্রাপ্ত $\log 6257$ এবং $\log 6258$-এর মানের সাহায্যে $\log 6257{\cdot}6$-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে, বা তৃতীয় তালিকা হইতে প্রাপ্ত $\tan 53^\circ 23'$ এবং $\tan 53^\circ 24'$-এর মানের সাহায্যে $\tan 53^\circ 23' 20''$-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে ; অথবা চতুর্থ তালিকা হইতে প্রাপ্ত $L \cos 37^\circ 42'$ এবং $L \cos 37^\circ 43'$-এর মানের সাহায্যে $L \cos 37^\circ 42' 48''$-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে ; কিভাবে তাহা সম্ভব ?

এই সমস্ত ক্ষেত্রে সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় তথ্য প্রয়োগ করা হয়। তথ্যটি নিম্নলিখিতভাবে উল্লেখ করা যাইতে পারে :—

"একটি চলরাশি x-এর নিয়মিত স্বল্পব্যবধানযুক্ত বিভিন্ন মান অনুযায়ী, x-এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি রাশির অনুরূপ বিভিন্ন মান নির্ণয় করিয়া তালিকাভুক্ত করিলে সাধারণতঃ দেখা যাইবে যে, নির্ভরশীল রাশির (ইহাকে বলা হয় যুক্তির অপেক্ষক বা function) স্বল্পপরিবর্তন, x-এর মানের (ইহাকে বলা হয় যুক্তি বা argument) স্বল্পপরিবর্তনের সমানুপাতী হইবে।"

আমরা উল্লিখিত তথ্য সত্য বলিয়া গ্রহণ করিব। উপযুক্ত সর্ত উল্লেখপূর্বক ইহার পূর্ণাঙ্গ প্রমাণ Calculus বা কলন্ শাস্ত্রের প্রয়োগ ব্যতিরেকে সম্ভব নয়। যে সমস্ত তালিকার ব্যবহারিক ক্ষেত্রে আমরা এই তথ্য প্রয়োগ করিব সেই সমস্ত ক্ষেত্রে ইহার সত্যতা প্রায় নির্বিচারে গ্রহণ করা যায়।

নিম্নলিখিত উদাহরণে এই তথ্যের প্রয়োগ দেখানো হইতেছে :

Ex. 1. *Given log* 63374 = 4·8019111 *and log* 63375 = 4·8019180, *find log* 63·3743 *and find the number whose logarithm is* $\overline{2}$·8019136.

এক্ষেত্রে, $\log 63375 = 4{\cdot}8019180$

এবং, $\log 63374 = 4{\cdot}8019111.$

সুতরাং, সংখ্যাটি 1 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদম্ বৃদ্ধি পাইবে ·0000069 (সাধারণতঃ "1-এর জন্য অন্তর 69"—এইরূপ লিখিত হয়)। অতএব, সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় তথ্য অনুসারে সংখ্যাটি ·3 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদম্ বৃদ্ধি পাইবে ·3 × ·0000069 বা ·00000207 বা ·0000021 (7 দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

সুতরাং, $\log 63374{\cdot}3 = 4{\cdot}8019111 + {\cdot}0000021 = 4{\cdot}8019132.$

$\therefore \quad \log 63{\cdot}3743 = 1{\cdot}8019132.$

পুনরায় 4·8019136 সংখ্যাটি 4·8019111 এবং 4·8019180-র মধ্যবর্তী এবং প্রথমটির সহিত ইহার অন্তর ·0000025 ; অতএব, 4·8019136 অবশ্যই 63374 ও 63375—এই দুইটি সংখ্যার মধ্যবর্তী কোন সংখ্যার লগারিদম্। মনে করি যে, সংখ্যাটি $63374 + x$.

1-এর জন্য অন্তর 69 (অর্থাৎ ·0000069) এবং x-এর জন্য অন্তর 25 (অর্থাৎ ·0000025) বলিয়া সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় নিয়ম অনুযায়ী

$$69 : 25 = 1 : x, \quad \text{অর্থাৎ} \quad x = \tfrac{25}{69} = {\cdot}36\cdots.$$

অতএব, $\log 63374{\cdot}36\cdots = 4{\cdot}8019136.$

এক্ষণে নির্ণেয় সংখ্যাটির লগারিদম্ $\overline{2}$·8019136 অর্থাৎ অংশক log 63374·36-এর অংশকের সমান। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যাটি 63374·36-এর ন্যায় একই ক্রমে সজ্জিত একই অঙ্কের দ্বারা গঠিত হইবে এবং ইহার পূর্ণক −2 বলিয়া সংখ্যাটি হইবে ·06337436···.

Ex. 2. (i) *Given* $L \sin 37^\circ\, 43'\, 50'' = 9{\cdot}7867152$

$L \sin 37^\circ 44' = 9{\cdot}7867424,$

find $L \sin 37^\circ 43' 56''$.

(ii) *Given* $L \tan 79^\circ 51' 40'' = 10{\cdot}7475657$
$L \tan 79^\circ 51' 50'' = 10{\cdot}7476872$,
find the angle whose L tan is 10·7476532. [C. U. 1921]

(i) এর ক্ষেত্রে 10″ (কোণের অন্তর)-এর জন্য L sin এর মানের অন্তর $= 272$ (অর্থাৎ ·0000272).

$\therefore$ 6″ এর জন্য অন্তর $= \frac{6}{10} \times 272 = 163{\cdot}2$ (অর্থাৎ ·00001632).

$\therefore L \sin 37^\circ 43' 56'' = 9{\cdot}7867152 + {\cdot}0000163 = 9{\cdot}7867315$.

(ii) এর ক্ষেত্রে যে-কোণের L tan = 10·7476532, তাহা 79° 51′ 40″ এবং 79°51′50″ এর মধ্যবর্তী। মনে করি যে, নির্ণেয় কোণটি $79^\circ 51' 40'' + x''$.

এক্ষণে, 10″ (কোণের অন্তর)-এর জন্য L tan-এর মানের অন্তর 1215 অর্থাৎ (·0001215).

এবং x''-এর জন্য অন্তর 875 (অর্থাৎ ·0000875),

[$\because 10{\cdot}7476532 - 10{\cdot}7475657 = {\cdot}0000875$.]

$\therefore \quad \frac{x}{10} = \frac{875}{1215}$ বা $x = 7{\cdot}2$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ 79° 51′ 47″·2.

Ex. 3. *Given* $\cos 53^\circ 17' = {\cdot}5257191$ *and diff. for* $1' = 2474$, *find* $\cos 58^\circ 17' 20''$.

1′ অর্থাৎ 60″-এর জন্য অন্তর $= 2474$.

20″ „ „ „ $= \frac{20}{60} \times 2474 = 825$. (প্রায়)

কোণ বৃদ্ধি পাইলে কোসাইন হ্রাস পায় বলিয়া,

$\cos 58^\circ 17' 20'' = {\cdot}5257191 - {\cdot}0000825 = {\cdot}5256366$.

Examples XIV(b)

1. Given log 18·906 = 1·2765997 and log 18·907 = 1·2766226, find log 1890·635.

2. Given log 69714 = 4·8433200, log 69715 = 4·8433262, find $\log ({\cdot}000697145)^{\frac{1}{5}}$.

3. Given log 37602 = 4·5752109, log 37601 = 4·5751994, find the number whose lagarithm is 1·5752086.

4. Given log 3 = ·4771213

log 74008 = 4·8692787, diff. for 1′ = 59,

find $(\cdot 09)^{\frac{1}{8}}$.

5. Given cos 32° 16′ = ·8455726 and cos 32° 17′ = ·8454172, find the value of cos 32° 16′ 24″ and find the angle whose cosine is ·8455176.

6. Find tan 38° 24′ 37·5″, having given tan 38° 24′ = ·7925902 and tan 38° 25′ = ·7930640.

7. Given L sin 44° 17′ = 9·8439842

and L sin 44° 18′ = 9·8441137,

find L sin 44° 17′ 33″. Deduce the value of L cosec 44° 17′ 33″.

8. Given L sin 36° 24′ = 9·7733614

L sin 36° 25′ = 9·7735327,

find the angle whose L sin is 9·7734642.

9. If L cot 53° 13′ = 9·8736937

L cot 53° 14′ = 9·8734302,

find θ where L cot θ = 9·8734523.

10. Given L tan 22° 37′ = 9·6197205, diff. for 1′ = 3557, find the value of L tan 22° 37′ 22″ and the angle whose L tan is 9·6195283.

11. Prove that, θ being any acute angle,

$$\text{L}\sin\theta + \text{L}\operatorname{cosec}\theta = \text{L}\cos\theta + \text{L}\sec\theta$$
$$= \text{L}\tan\theta + \text{L}\cot\theta = 20.$$

12. Given L cos 36° 40′ = 9·9042411, find L sec 36° 40′.

13. Given L cos 34° 44′ = 9·9147729, L cos 34° 45′ = 9·9146852, find the value of L cos 34° 44′ 27″.

14. Given L sin 36° 40′ = 9·7760897

L cos 36° 40′ = 9·9042411,

find L tan 36° 40′.

15. Prove that the difference of tabular logarithms of any two ratios is equal to the difference of the logarithms of those two ratios.

16. If $\sin\theta = \cdot 8$, find θ,

given $\log 2 = \cdot 3010300$,

$L \sin 53^\circ 7' = 9 \cdot 9030136$, $L \sec 36^\circ 52' = 10 \cdot 0968916$.

17. Find the value of

$$\frac{\sin 34^\circ 17' \times \cos 77^\circ 23'}{\tan 27^\circ 12'}$$

given $L \sin 12^\circ 37' = 9 \cdot 3393$, $L \cos 55^\circ 43' = 9 \cdot 7507$,

$L \tan 62^\circ 48' = 10 \cdot 2891$, and $\log 23 \cdot 94 = 1 \cdot 3791$.

ANSWERS

1. 3·2766077. **2.** $\bar{1}$·3686646. **3.** 37·6018. **4.** ·7400827.
5. ·8455104 ; 32° 16′ 21″. **6.** ·7928863.
7. 9·8440554, 10·1559446. **8.** 36° 24′ 36″. **9.** 53° 13′ 55″.
10. 9·6198509 ; 22° 36′ 28″. **12.** 10·0957589. **13.** 9·9147334.
14. 9·8718486 **16.** $\theta = 50^\circ 7' 48''$ nearly. **17.** ·2394.

পঞ্চদশ অধ্যায়

ত্রিভুজের সমাধান

(Solution of Triangles)

15·1. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ, মোট এই ছয়টি অংশ। অবশ্য ইহারা পরস্পর নিরপেক্ষ নয়, ইহারা ত্রয়োদশ অধ্যায়ে প্রমাণিত সূত্রাবলীর দ্বারা সংশ্লিষ্ট। বস্তুতঃ, মাত্র তিনটি অংশ দেওয়া থাকিলে অন্যান্য অংশগুলিও তাহাদের সাহায্যে সাধারণতঃ নির্ণয় করা যায় এবং সংশ্লিষ্ট ত্রিভুজটির সম্পূর্ণ বৈশিষ্ট্যই নির্ণীত হয়। নিম্নলিখিত বিভিন্ন ক্ষেত্রগুলি হওয়া সম্ভব :

(1) তিনটি বাহু দেওয়া থাকিতে পারে,

(2) তিনটি কোণ দেওয়া থাকিতে পারে,

(3) দুইটি বাহু এবং অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া থাকিতে পারে,

(4) দুইটি কোণ এবং একটি বাহু দেওয়া থাকিতে পারে,

(5) দুইটি বাহু এবং একটি বিপরীত কোণ দেওয়া থাকিতে পারে।

আমরা এইগুলি সম্বন্ধে একে একে আলোচনা করিব।

15·2. তিনটি বাহু নির্দিষ্ট থাকিলে ত্রিভুজের সমাধান (Three sides given).

মনে করি, ABC ত্রিভুজের a, b, c -এই তিনটি বাহু দেওয়া আছে। যে-কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, জ্যামিতিক প্রণালীতে ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা যাইবে এবং কেবলমাত্র একটি ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব হইবে অর্থাৎ ইহার কোণগুলির মাত্রাও নির্দিষ্ট হইবে। যে-কোন কোণ, যথা A, নির্ণয় করিতে হইলে আমরা

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

এই সূত্রটি প্রয়োগ করিয়া $\cos A$ নির্ণয় করিতে পারি ; পরে কোসাইনের তালিকার সাহায্যে A-এর মান নির্ণয় করিতে পারি। স্পষ্টই দেখা যায় যে,

কোণটি একটি ত্রিভুজের কোণ বলিয়া উহা 0 এবং π-এর মধ্যবর্তী হইবে, এবং এই সীমার মধ্যে নির্দিষ্ট কোসাইনবিশিষ্ট কোণের কেবলমাত্র একটি মান থাকিবে। অতএব, কোণটির মান নির্দিষ্টভাবে নির্ণীত হইবে।

এইস্থলে আমরা একটি বিষয় পরিষ্কার করিতে চাই। যদিও ব্যবহৃত সূত্রটি সত্য, তবুও যে তালিকা হইতে কোণগুলির মান নির্ণয় করা হয় তাহাতে কোসাইনের আসন্ন মান দেওয়া থাকে বলিয়া নির্ণীত মানগুলিও কোণগুলির আসন্ন মান মাত্র। কলন (Calculus)-এর সাহায্যে উচ্চতর গণিতে প্রমাণিত হইয়াছে যে **আসন্নমানযুক্ত তালিকা হইতে যদি কোণগুলি নির্ণীত হয় তাহা হইলে উৎকৃষ্টতম ফল পাওয়া যায় লগারিদ্‌মিক ট্যানজেণ্টের সাহায্যে নির্ণীত মান হইতে ;** কারণ, চারি আসন্ন মানযুক্ত L tan-এর তালিকা হইতে প্রাপ্ত মান, আসন্নমানযুক্ত সাইন বা কোসাইনের তালিকা হইতে প্রাপ্ত মান অপেক্ষা বিশুদ্ধতর হইবে।

সুতরাং, কোন উপযুক্ত ট্যানজেণ্ট সূত্র জানা থাকিলে আমরা তাহাই ব্যবহার করিব। সেইজন্য বাস্তব ক্ষেত্রে A নির্ণয় করিতে হইলে

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \qquad [\,s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,]$$

এই সূত্রটির প্রয়োগই বাঞ্ছনীয়।

উভয়পক্ষের লগারিদ্‌ম্ লইয়া 10 যোগ করিলে $L\tan\frac{A}{2}$-র মান নির্ণীত হয় এবং তাহার সাহায্যে $\frac{A}{2}$ অর্থাৎ A নির্ণয় করা যায়। অনুরূপভাবে B এবং C-ও নির্ণীত হইতে পারে।

যদি কোনও ক্ষেত্রে $\tan\frac{A}{2}$-র মান কোন বিশিষ্ট কোণের মানের সহিত সমান হয় তাহা হইলে লগারিদ্‌ম্-এর প্রয়োগ নিষ্প্রয়োজন।

Ex. *The sides of a triangle are 2, 3, 4. Find the greatest angle, having given*

$$\log 2 = \cdot 30103,\ \log 3 = \cdot 4771213.$$

$$L\tan 52^\circ 14' = 10\cdot 1108395,\ L\tan 52^\circ 15' = 10\cdot 1111004.$$

এক্ষেত্রে, $s=\frac{1}{2}(2+3+4)=\frac{9}{2}.$

বৃহত্তম বাহু 4-কে a-দ্বারা চিহ্নিত করিলে, বৃহত্তম কোণ A (a-এর বিপরীত কোণ) নিম্নলিখিতভাবে নির্ণীত হইবে :

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(\frac{9}{2}-2)(\frac{9}{2}-3)}{\frac{9}{2}(\frac{9}{2}-4)}}$$

$$=\sqrt{\frac{5\,.\,3}{9\,.\,1}}=\sqrt{\frac{10}{2\,.\,3}}.$$

$$\therefore\quad L\tan\tfrac{1}{2}A=10+\tfrac{1}{2}(\log 10-\log 2-\log 3)$$

$$=10+\tfrac{1}{2}(1-\cdot30103-\cdot4771213)=10\cdot1109244.$$

এক্ষণে, $L\tan\frac{1}{2}A$ সংখ্যাটি $L\tan 52°14'$ এবং $L\tan 52°15'$-এর মধ্যবর্তী, অর্থাৎ $\frac{1}{2}A$ কোণ $52°14'$ এবং $52°15'$-এর মধ্যবর্তী হইবে।

মনে করি যে, $\frac{1}{2}A=52°14'x''$.

অতএব, x''-এর জন্য অন্তর $=\cdot0000849$,

এবং $1'$ অর্থাৎ $60''$-এর জন্য অন্তর $\cdot0002609$.

$$\therefore\quad \frac{x}{60}=\frac{849}{2609} \text{ বা } x=\frac{60\times849}{2609}=19\cdot5 \text{ (প্রায়)}$$

অতএব, $\frac{1}{2}A=52°14'19''\cdot5$ অর্থাৎ, $A=104°28'39''$.

15·3. তিনটি কোণ নির্দিষ্ট হইলে ত্রিভুজের সমাধান (Three angles given).

এক্ষেত্রে ত্রিভুজের সম্পূর্ণ সমাধান অসম্ভব, কারণ তিনটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণবিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কিত করা সম্ভব। এই সমস্ত ত্রিভুজগুলি সদৃশকোণী (equiangular) বলিয়া সদৃশ (similar) হইবে ; ইহাদের বাহুগুলির অনুপাত

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$-এই সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। সুতরাং,

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C.$$

Ex. *The angles of a triangle are in the ratio* 2 : 3 : 7. *Prove that the sides are in the ratio of* $\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$.

কোণগুলির অনুপাত 2 : 3 : 7 এবং উহাদের সমষ্টি 180° বলিয়া, কোণগুলি যথাক্রমে 30°, 45° এবং 105° হইবে।

অতএব, বাহুগুলির অনুপাত $= \sin 30^\circ : \sin 45^\circ : \sin 105^\circ$

$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3}+1).$$

Examples XV(a)

1. The sides of a triangle are 24, 22, 14 ; find the least angle, given $L \tan 17^\circ\, 33' = 9{\cdot}500042$, diff. for $1' = 439$.

2. The sides of a triangle are 50, 36 and 28 ; find the greatest angle, having given

$$\log 19 = 1{\cdot}2787536, \qquad \log 29 = 1{\cdot}4623980$$
$$L \tan 51^\circ\, 0' = 10{\cdot}0916308, \; L \tan 51^\circ 1' = 10{\cdot}0918891.$$

3. The sides of a triangle are 9, 10 and 11 ; find the angle opposite to the side 10, given

$$L \tan 29^\circ\, 30' = 9{\cdot}7526420, \; L \tan 29^\circ\, 29' = 9{\cdot}7523472,$$
$$\log 2 = {\cdot}30103.$$ [C. U. 1943]

4. The sides of a triangle are 2, 3, 4. Find all the angles correctly to degrees and minutes by the help of mathematical tables.

5. (i) The sides of a triangle are 15, 19, 24 ; find the greatest angle of the triangle.

Given $\log 5{\cdot}7 = {\cdot}75587$, $L \cos 88^\circ\, 59' = 8{\cdot}24903$
diff. for $1' = 718$. [C. U. 1936]

(ii) Find the greatest angle in degrees, minutes and seconds in a triangle whose sides are 5, 6, 7, having given

$$\log 6 = {\cdot}7781513$$
$$L \cos 39^\circ\, 14' = 9{\cdot}8890644, \text{ diff. for } 60'' = {\cdot}0001032.$$

6. (i) The sides of a triangle are 7, 8, 9 ; solve the triangle. [C. U. 1938]

(ii) If $a = 35$, $b = 40$, $c = 66$, determine the greatest angle. [C. U. 1945]

[Use *Mathematical Tables*]

7. Given $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3} - 1$; solve the triangle.

8. Given $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3} + 1$; solve the triangle.

9. If $a=7$, $b=5$, $c=8$, solve the triangle.
Given $\cos 38° 11' = \frac{11}{14}$.

10. If $a=3+\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$, $c=\sqrt{3}$, solve the triangle.

11. The angles of a triangle are 105°, 60° and 15°; find the ratio of the sides.

12. If $A=45°$, $B=60°$, show that $c : a = (\sqrt{3}+1) : 2$.

13. The angles of a triangle are as 1 : 2 : 7 ; find the ratio of the greatest side to the least side.

14. If $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$, find $a : b : c$.

15. If the angles adjacent to the base of a triangle are $22\frac{1}{2}°$ and $112\frac{1}{2}°$, show that the altitude is half the base.

16. If the sides of a triangle are 4, 5, 6, show that the greatest angle is double the least.

ANSWERS

1. 35° 5′ 49″. 2. 102° 1′ 28″. 3. 58° 59′ 33″.
4. 104° 30′ ; 46° 36′ ; 28° 54′. 5, (i) 86° 59′ 40·9″.
(ii) 78° 27′ 46·86″. 6. (i) 48° 11′ 23″ ; 58° 24′ 43″ ; 73° 23′ 54″.
(ii) 132° 34′ 24″. 7. $A=120°$, $B=45°$, $C=15°$.
8. $A=45°$, $B=30°$, $C=105°$. 9. $A=60°$, $B=38° 11'$, $C=81° 49'$.
10. $A=105°$, $B=45°$, $C=30°$. 11. $(\sqrt{3}+1) : \sqrt{6} : (\sqrt{3}-1)$.
13. $(\sqrt{5}+1) : (\sqrt{5}-1)$. 14. 3 : 4 : 5.

15·4. দুইটি বাহু এবং অন্তর্ভূত কোণ নির্দিষ্ট থাকিলে ত্রিভুজের সমাধান : (Two sides and the included angle given).

মনে করি যে, ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত (included) কোণের মান, b, c এবং A ; জ্যামিতিক প্রণালীতে এই ত্রিভুজ অতি সহজেই অঙ্কিত করা যায় এবং একটিমাত্র ত্রিভুজই পাওয়া যায়। অপর দুইটি কোণ নির্ণয় করিতে হইলে আমরা নিম্নোক্ত সূত্র দুইটির সাহায্য লই ; যথা—

$$B + C = 180° - A \quad \text{অর্থাৎ,} \quad \tfrac{1}{2}(B+C) = 90° - \tfrac{1}{2}A$$

এবং $$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

অর্থাৎ, $$L\tan\frac{B-C}{2}=10+\log\left(\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\right)$$
$$=\log\frac{b-c}{b+c}+L\cot\frac{A}{2}.$$

এক্ষণে b, c এবং A প্রদত্ত রাশি বলিয়া দক্ষিণ পক্ষের মান নির্ণয় করা যায় এবং ইহারই সাহায্যে পাওয়া যায় $L\tan\frac{1}{2}(B-C)$ অর্থাৎ $\frac{1}{2}(B-C)$-এর মান।

অতএব, $\frac{1}{2}(B+C)$ এবং $\frac{1}{2}(B-C)$ উভয়েই নির্ণীত হওয়ার দরুণ আমরা যোগ ও বিয়োগ ক্রিয়ার সাহায্যে যথাক্রমে B এবং C-এর মান নির্ণয় করিতে সক্ষম হইব।

15·2 অনুচ্ছেদে ট্যানজেণ্ট সূত্রের প্রয়োগের কারণ পূর্বেই বর্ণিত হইয়াছে। B এবং C নির্দিষ্ট হইলে আমরা

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$-এর সাহায্যে c-এর মান নির্ণয় করিতে পারি।

Ex. *In a triangle,* $b=2{\cdot}25$, $c=1{\cdot}75$, $A=54^\circ$, *find B and C, having given*

$$\log 2={\cdot}301030,\qquad L\tan 63^\circ=10{\cdot}292834$$
$$L\tan 13^\circ 47'=9{\cdot}389724,\qquad L\tan 13^\circ 48'=9{\cdot}390270$$

[C. U. 1931]

এক্ষেত্রে, $\frac{1}{2}(B+C)=90^\circ-\frac{1}{2}A=90^\circ-27^\circ=63^\circ$ ··· (i)

পুনরায়, $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{{\cdot}5}{4}\cot 27^\circ=\frac{1}{8}\tan 63^\circ.$

$$\therefore L\tan\tfrac{1}{2}(B-C)=L\tan 63^\circ-3\log 2$$
$$=10{\cdot}292834-{\cdot}903090=9{\cdot}389744.$$

এক্ষণে, $L\tan 13^\circ 47'=9{\cdot}389724$, এবং $L\tan 13^\circ 48'=9{\cdot}390270$.
অতএব, $\frac{1}{2}(B-C)=13^\circ 47'\,x''$ এবং x''-এর জন্য পার্থক্য $={\cdot}000020$.
1′ অর্থাৎ 60″-এর জন্য পার্থক্য $={\cdot}000546$.

$\therefore\quad \frac{x}{60}=\frac{20}{546}$ অথবা, $x=\frac{20\times 60}{546}=2{\cdot}2$ (প্রায়)।

অতএব, $\frac{1}{2}(B-C)=13^\circ 47'\,2''{\cdot}2$ (প্রায়) ··· (ii)

(i) এবং (ii)-এর সাহায্যে $B=76^\circ 47'\,2''{\cdot}2$ এবং $C=49^\circ 12'\,57''{\cdot}8$.

15·5. দুইটি কোণ এবং একটি বাহু নির্দিষ্ট থাকিলে ত্রিভুজের সমাধান : (Two angles and a side given).

মনে করি যে, ত্রিভুজের একটি বাহু a এবং দুইটি কোণ দেওয়া আছে। তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180° বলিয়া তৃতীয় কোণটিও নির্ণয় করা যায়। অপর দুইটি বাহু b এবং c নির্ণয় করিতে হইলে

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

এই সূত্রটি ব্যবহার করিতে হইবে।

Ex. *In a triangle ABC,* $A = 38°\ 20'$, $B = 45°$ এবং $b = 64\ ft.$ *Find c, having given* $\log 2 = \cdot30103$, $L \sin 83°\ 20' = 9\cdot99705$ *and* $\log \cdot089896 = \bar{2}\cdot95374$.

এক্ষেত্রে, $C = 180° - (A + B) = 180° - 83°\ 20'$

এক্ষণে, $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$.

অথবা, $\dfrac{c}{\sin(180° - 83°\ 20')} = \dfrac{64}{\sin 45°} = \dfrac{64}{1/\sqrt{2}} = 64\sqrt{2} = 2^{\frac{13}{2}}$

$\therefore \quad c = 2^{\frac{13}{2}} \sin 83°\ 20'$

$\therefore \quad \log c = \frac{13}{2} \log 2 + L \sin 83°\ 20' - 10$

$= \frac{13}{2}(\cdot30103) + 9\cdot99705 - 10 = 1\cdot95374.$

অতএব, $\log c$-এর অংশক $\log \cdot089896$-এর অংশকের সমান, কিন্তু ইহার পূর্ণক 1 ; অতএব, $c = 89\cdot896$ ফুট।

Examples XV(b)

1. Two sides of a triangle are 3 and 5 feet and the included angle is 120° ; find the other angles, having given

$\log 4\cdot8 = \cdot6812412$

$L \tan 8°\ 12' = 9\cdot1586706$, diff. for $60'' = 8940$. [C. U. 1949]

2. If $b = 1300$, $c = 1400$ and $A = 60°$, find B and C.
Given $\log 3 = \cdot4771213$,
$L \tan 3°\ 40' = 8\cdot8067422$, diff. for $10'' = 3306$.

3. If $a=21$, $b=11$, $C=34° 42' 30''$, find A and B.

Given $\log 2 = \cdot 30103$,

and $L \tan 72° 38' 45'' = 10 \cdot 50515$.

4. If the sides a and b are in the ratio $7 : 3$ and the included angle C is $60°$, find A and B, given

$\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$

$L \tan 34° 42' = 9 \cdot 8403776$, diff. for $1' = 2699$.

5. Two sides of a plane triangle are 14 and 11 and the included angle is $60°$. Find the remaining angles, having given $L \tan 11° 44' = 9 \cdot 3174299$, $L \tan 11° 45' = 9 \cdot 3180640$.

[C. U. 1922]

6. (i) Two sides of a triangle are 80 and 100 ft. and the included angle is $60°$. Find the other angles. [C. U. 1946]

(ii) If $a=5$, $b=3$, $C=70° 30'$, find the remaining angles.

(iii) If $a=39 \cdot 9$, $b=43 \cdot 2$, $C=38° 14'$, solve the triangle.

[*Use Mathematical Tables*]

7. (i) In a plane triangle, $b=540$, $c=420$ and $A=52° 6'$; find B and C having given

$L \tan 26° 3' = 9 \cdot 6891430$,

$L \tan 14° 20' = 9 \cdot 4074189$, $L \tan 14° 21' = 9 \cdot 4079453$.

[C. U. 1934]

(ii) Given $a=70$, $b=35$, $C=36° 52' 12''$, $\log 3 = 0 \cdot 4771213$, $L \cot 18° 26' 6'' = 10 \cdot 4771213$. Calculate the other two angles A and B. [C. U. 1935, '37]

8. If $a=2\sqrt{6}$, $c=6-2\sqrt{3}$, $B=75°$, solve the triangle.

9. Two sides of a triangle are $\sqrt{3}+1$ and $\sqrt{3}-1$ and the included angle is $60°$; solve the triangle.

10. (i) If $a=2$, $b=1+\sqrt{3}$, $C=60°$, solve the triangle.

(ii) If $a=2$, $b=4$, $C=60°$, find A and B.

11. If $a=19$, $B=52° 28'$ and $C=93° 40'$, find b, having given

$\log 27038 = 4 \cdot 4319746$; $\log 19 = 1 \cdot 2787536$;

$\log 27037 = 4 \cdot 4319585$;

$L \sin 52° 28' = 9 \cdot 8992727$, $L \sin 33° 52' = 9 \cdot 7460595$.

12. If $B=45°$, $C=10°$ and $a=200$ ft., find b, having given
$\log 2 = \cdot 30103$, $L \sin 55° = 9\cdot 9133645$
$\log 1726\cdot 4 = 3\cdot 2371414$, $\log 1726\cdot 5 = 3\cdot 2371666$.
[C. U. 1947]

13. If $A=41° \, 13' \, 22''$, $B=71° \, 19' \, 5''$, and $a=55$, find b, given
$\log 55 = 1\cdot 7403627$, $\log 79063 = 4\cdot 8979775$
$L \sin 41° \, 13' \, 22'' = 9\cdot 8188779$
$L \sin 71° \, 19' \, 5'' = 9\cdot 9764927$.

14. (i) If $B=70° \, 30'$, $C=78° \, 10'$, $a=102$, solve the triangle.
(ii) If $a=39$, $A=81° \, 35'$, $B=27° \, 55'$, solve the triangle.
(iii) If $A=37° \, 15'$, $B=72° \, 5'$, $a=75\cdot 2$, find b and c.
[*Mathematical tables should be used*]

15. If $A=75°$, $B=30°$, $b=\sqrt{8}$, solve the triangle.

16. If $A=30°$, $B=45°$, $b=2$, solve the triangle.

17. In a triangle in which each base angle is double of the third angle, the base is 2 ; solve the triangle.

18. Given $a=\sqrt{57}$, $A=60°$, $\triangle = 2\sqrt{3}$, find b and c.

ANSWERS

1. $B=38° \, 12' \, 48''$, $C=21° \, 47' \, 12''$.

2. $B=56° \, 19' \, 46\cdot 3''$, $C=63° \, 40' \, 13\cdot 7''$.

3. $A=117° \, 38' \, 45''$, $B=27° \, 38' \, 45''$. **4.** $A=94° \, 42' \, 54''$, $B=25° \, 17' \, 6''$.

5. $B=71° \, 44' \, 29\cdot 5''$, $C=48° \, 15' \, 30\cdot 5''$. **6.** (i) $70° \, 53' \, 36''$; $49° \, 6' \, 14''$.
(ii) $74° \, 13' \, 50''$, $35° \, 16' \, 10''$. (iii) $A=64° \, 21'$, $B=77° \, 25'$, $c=27\cdot 39$.

7. (i) $B=78° \, 17' \, 39\cdot 6''$, $C=49° \, 36' \, 20\cdot 4''$. (ii) $116° \, 33' \, 54''$; $26° \, 33' \, 54''$.

8. $A=B=75°$, $C=30°$, $b=2\sqrt{6}$. **9.** $\sqrt{6}$, 15°, 105°.

10. (i) $A=45°$, $B=75°$, $c=\sqrt{6}$. (ii) $A=30°$, $B=90°$. **11.** $27\cdot 0375$.

12. $172\cdot 6436$ ft. **13.** $79\cdot 063$. **14.** (i) $A=31° \, 20'$, $b=185$, $c=192$.
(ii) $b=18\cdot 46$, $c=37\cdot 16$, $C=70° \, 30'$. (iii) $b=118\cdot 9$, $c=117\cdot 2$.

15. $C=75°$, $a=c=2\sqrt{3}+2$. **16.** $C=105°$, $a=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}+1$.

17. 72°, 72°, 36° ; each side $=\sqrt{5}+1$. **18.** 8, 1.

15·6. দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ নির্দিষ্ট থাকিলে ত্রিভুজের সমাধান (Two sides and an opposite angle given) :

মনে করি, ABC ত্রিভুজের b এবং c—এই দুইটি বাহু এবং b বাহুর বিপরীত কোণ B দেওয়া আছে।

এক্ষেত্রে $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$ বা $\sin C=\frac{c \sin B}{b}$.

এই সূত্রের সাহায্যে C-কোণের মান নির্ণয় করা যায়।

এক্ষণে তিনটি বিভিন্ন ক্ষেত্র উপস্থিত হইতে পারে। যথা :

(i) $c \sin B > b$: এক্ষেত্রে $\sin C$ এক অপেক্ষা বৃহত্তর, অতএব, C নির্ণয় করা যায় না ; অর্থাৎ এক্ষেত্রে কোন ত্রিভুজ অঙ্কিত করা সম্ভব নয়।

(ii) $c \sin B = b$: এক্ষেত্রে $\sin C = 1$; অতএব, $C = 90°$ এবং $A = 90° - B$; সুতরাং এক্ষেত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যাহার C কোণ সমকোণ ; এবং, $c^2 = a^2 + b^2$ বা $a = \sqrt{c^2 - b^2}$—এই সূত্রের সাহায্যে a বাহু নির্ণয় করা যায়।

(iii) $c \sin B < b$: এক্ষেত্রে $\sin$ C এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; অতএব, C-এর মান নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু সম্পূরক কোণের সাইন সমান হয় বলিয়া, ত্রিভুজের এই কোণটি সূক্ষ্ম বা স্থূলকোণ দুইই হইতে পারে। অতএব, C-এর দুইটি মান পাওয়া যায় যাহারা পরস্পর সম্পূরক। এইখানেও তিনটি বিভিন্ন ক্ষেত্র উপস্থিত হইতে পারে।

ক্ষেত্র A : দুইটি বাহুর মধ্যে $b > c$ হইলে, $B > C$; কাজেই C স্থূলকোণ হইতে পারে না, কারণ, সেক্ষেত্রে B-ও স্থূলকোণ হইবে, অর্থাৎ B ও C কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। অতএব, C কেবলমাত্র সূক্ষ্মকোণই হইতে পারে। এক্ষণে, B এবং C উভয়েই নির্দ্দিষ্ট হইলে $A + B + C = 180°$ বলিয়া A-ও নির্ণীত হইবে। অতঃপর,

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ এই সূত্রের সাহায্যে a-বাহু নির্ণীত হইবে। অতএব, ত্রিভুজটির কেবলমাত্র একটি সমাধান সম্ভব।

ক্ষেত্র B : $b = c$ হইলে $B = C$, এবং এক্ষেত্রেও C স্থূলকোণ হইতে পারে না ; কাজেই, C-কে সূক্ষ্মকোণ কল্পনা করিলে ক্ষেত্র A-এর অনুরূপ এক্ষেত্রেও ত্রিভুজটির কেবলমাত্র একটি সমাধান সম্ভব।

ক্ষেত্র C : $b < c$ হইলে $B < C$; অতএব, C সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ উভয়ই হইতে পারে, এবং এক্ষেত্রে সম্পূরক দুইটি কোণই গ্রাহ্য করিতে হইবে। সুতরাং b, c এবং B নির্দিষ্ট থাকিলে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব হইবে। C-এর প্রতিটি মানের জন্য A ভিন্ন হইবে এবং ইহার মান নির্ণীত হইবে $A + B + C = 180°$—এই সূত্রটির সাহায্যে। অতঃপর a-বাহু নির্ণয় করিতে

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ এই সূত্রের সাহায্য লইতে হইবে।

ত্রিভুজের সমাধানের এই ক্ষেত্রকে (যেক্ষেত্রে b, c এবং B নির্দিষ্ট এবং $b > c \sin B$, কিন্তু $< c$) বলা হয় **দ্ব্যর্থক** (ambiguous) ক্ষেত্র।

উপরোক্ত ফলাফলগুলি সংক্ষেপে নিম্নলিখিতভাবে উল্লেখ করা যায়: একটি ত্রিভুজে b, c, B নির্দিষ্ট এবং

(i) $b < c \sin B$ হইলে, কোন ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

(ii) $b = c \sin B$ হইলে, সমাধান হইবে একটি নির্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

(iii) $b > c$ (কাজেই $> c \sin B$) হইলে, C সূক্ষ্মকোণবিশিষ্ট একটি-মাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে।

(iv) $b = c$ (কাজেই $> c \sin B$) হইলে, একটিমাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় যাহার C কোণ হইবে সূক্ষ্মকোণ।

(v) $b > c \sin B$, কিন্তু $< c$ হইলে, দুইটি সমাধান সম্ভব ও এই ক্ষেত্রকে বলা হয় **দ্ব্যর্থক** ক্ষেত্র।

15·7. দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের জ্যামিতিক আলোচনা (Geometrical treatment of ambiguous case) :

দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ, যথা—b, c, B দেওয়া থাকিলে জ্যামিতিক প্রণালীতে ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া উপরোক্ত বিষয়গুলি আরও পরিষ্কার করা যায়।

$\angle B$-এর সমান করিয়া $\angle ABX$ অঙ্কিত করিয়া উহার একটি বাহু হইতে BA অংশ c-এর সমান করিয়া কাটিয়া লওয়া হইল। AN সরলরেখা AX-এর উপর লম্ব হইলে, $\frac{AN}{AB} = \sin B$; অতএব, $AN = AB \sin B = c \sin B$. এখন A কেন্দ্র এবং b ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল।

প্রথম ক্ষেত্র : $b < c \sin B$ অর্থাৎ $< AN$ হইলে, বৃত্তটি BX বাহুর সহিত একেবারেই মিলিত হইবে না অর্থাৎ কোন ত্রিভুজই অঙ্কিত করা সম্ভব হইবে না। (চিত্র (i) দ্রষ্টব্য)

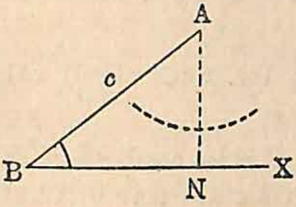


Fig. (i)

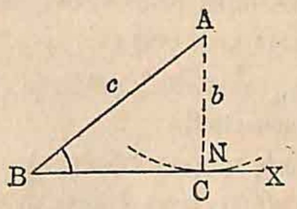


Fig. (ii)

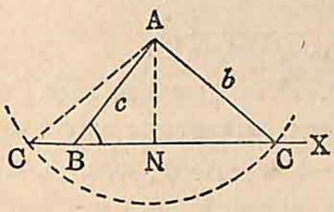


Fig. (iii)

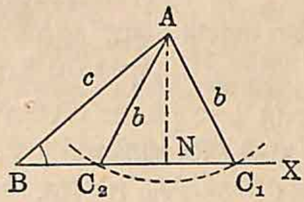


Fig. (iv)

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : $b = c \sin B$ অর্থাৎ $= AN$ হইলে, বৃত্তটি BX-কে N-এর সমবিন্দু C-তে স্পর্শ করিবে ; (চিত্র (ii) দ্রষ্টব্য)। অতএব, একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে যাহার বাহুদ্বয় AB ও AC এবং কোণ B যথাক্রমে নির্দিষ্ট বাহু b, c এবং কোণ B-এর সমান হইবে। অতএব, ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

তৃতীয় ক্ষেত্র : $b > c > AB$ হইলে, বৃত্তটি BX-কে B-বিন্দুর উভয়দিকে অবস্থিত C এবং C′—এই দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে (চিত্র (iii) দ্রষ্টব্য)। ABC′ ত্রিভুজের AB ও AC′ বাহুদ্বয় যথাক্রমে b এবং c-এর সমান হইলেও $\angle ABC'$ নির্দিষ্ট কোণ B-এর সমান না হইয়া উহার সম্পূরক হইবে। অতএব, $\triangle ABC'$ নির্ণেয় সমাধান নয়। এক্ষেত্রে মাত্র একটি ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব।

চতুর্থ ক্ষেত্র : $b = c$ অর্থাৎ $= AB$ হইলে, একটিমাত্র ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করা যায়, কারণ পূর্বোক্ত ক্ষেত্রের C′, B-এর সহিত অভিন্ন হইবে।

পঞ্চম ক্ষেত্র : $b > c \sin B$ অর্থাৎ $> AN$, কিন্তু $< c$ (বা AB) হইলে, বৃত্তটি BX-কে B বিন্দুর একই দিকে C_1 এবং C_2 এই দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে [চিত্র (iv) দ্রষ্টব্য]। ABC_1 এবং ABC_2—এই দুইটি ত্রিভুজেরই তিনটি অংশ নির্দিষ্ট তিনটি অংশের সমান এবং এই দুইটিই সম্ভাব্য সমাধান। অতএব ইহাই দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র।

15·8. দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের বীজীয় আলোচনা (Algebraic Discussion) :

b, c এবং B দেওয়া থাকিলে, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ এই সমীকরণের সাহায্যে আমরা প্রথমে C নির্ণয় না করিয়া a-র মান নির্ণয় করিতে পারি। এই সমীকরণকে a-র দ্বিঘাত সমীকরণ কল্পনা করিলে

$$a^2 - 2ca \cos B + c^2 - b^2 = 0,$$

এবং ইহা সমাধান করিলে

$$a = c \cos B \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}.$$

(i) $b < c \sin B$ হইলে $b^2 - c^2 \sin^2 B$ ঋণাত্মক হইবে ; অর্থাৎ a-র দুইটি মানই হইবে কাল্পনিক। (অতএব, কোন প্রকারের সমাধান অসম্ভব)।

(ii) $b = c \sin B$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B = 0$; অতএব, a-র দুইটি মান বাস্তব এবং পরস্পর সমান।

(এক্ষেত্রে একটিমাত্র সমাধান এবং ত্রিভুজের C কোণ সমকোণ, যেহেতু $b = c \sin B$).

(iii) $b > c \sin B$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B$ ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ 'a'-র দুইটি মান হইবে বাস্তব এবং পৃথক্, কিন্তু উভয় মান সর্বত্র গ্রাহ্য হইবে না।

(1) $b > c$ অর্থাৎ $b^2 > c^2(\sin^2 B + \cos^2 B)$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B > c^2 \cos^2 B$ অর্থাৎ $\sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B} > c \cos B$ হইবে, এবং a-র একটি মান ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে। (অতএব, একটিমাত্র সমাধান।)

(2) $b = c$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B = c^2 - c^2 \sin^2 B = c^2 \cos^2 B$; অতএব, a-র একটি মান শূন্য। (অতএব, একটিমাত্র সমাধান।)

(3) $b < c$ অর্থাৎ $b^2 < c^2(\sin^2 B + \cos^2 B)$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B < c^2 \cos^2 B$; অর্থাৎ $\sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B} < c \cos B$; সুতরাং, a-র উভয় মানই বাস্তব এবং ধনাত্মক। (অতএব, এক্ষেত্রে দুইটি সমাধান হইবে।)

ইহা দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের বীজীয় আলোচনা (algebraic discussion)। এই প্রণালীর সাহায্যে একটি প্রশ্নের সমাধান দেওয়া হইল :

Ex. 1. *In a triangle, $b=15$ ft., $c=10$ ft., $B=60°$. Find a and A having given sin 84° 44′ = ·99578.*

আমরা জানি, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে, $225=100+a^2-20a\cos 60°$

বা, $a^2-10a-125=0. \quad \therefore \; a=5\pm 5\sqrt{6}.$

a-র ঋণাত্মক মান অসম্ভব বলিয়া অগ্রাহ্য করিলে, a-র একমাত্র মান $5(\sqrt{6}+1)$ ফুট। অতএব, একটিমাত্র সমাধান সম্ভব।

পুনরায়, $\sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{5(\sqrt{6}+1)}{15}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

$$=\frac{3\times 1{\cdot}41421\cdots+1{\cdot}73205\cdots}{6}={\cdot}99578\cdots$$

$\therefore \; A=84°\,44'.$

Ex. 2. *In a triangle, $a=73{\cdot}4$, $b=64{\cdot}9$ and $B=48°\,13'\,25''$; find A, having given*

$$\log 734=2{\cdot}8656961,\ \log 649=2{\cdot}8122447$$
$$L\sin 48°\,13'\,25''=9{\cdot}8725936.$$
$$L\sin 57°\,30'=9{\cdot}9260292 \qquad (\textit{diff. for } 1'=804)$$

Is the case ambiguous ?

এক্ষেত্রে $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{734}{649}\sin 48°\,13'\,25''.$

$$\therefore \; L\sin A=\log 734-\log 649+L\sin 48°\,13'\,25''$$
$$=2{\cdot}8656961-2{\cdot}8122447+9{\cdot}8725936$$
$$=9{\cdot}9260450.$$

$L\sin 57°\,30'$ হইতে ইহার অন্তর 158 (অর্থাৎ ·0000158) এবং 1′ অর্থাৎ 60″-র জন্য অন্তর 804 (অর্থাৎ ·0000804).

অতএব $A=57°30'x''$ এবং $\frac{x}{60}=\frac{158}{804}$ অর্থাৎ $x=11{\cdot}8$ (প্রায়)

$\therefore \; A=57°\,30'\,11''{\cdot}8$ বা ইহার সম্পূরক কোণ $122°\,29'\,48''{\cdot}2$, কারণ উভয়ের সাইন এবং সেইহেতু L sine সমান।

এক্ষণে, এইক্ষেত্রে $a>b$, অর্থাৎ $A>B$ বলিয়া উভয়ই A-র সম্ভাব্য মান। অতএব, ইহা দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র এবং ত্রিভুজের দুইটি সমাধান হইবে।

Examples XV(c)

1. Given (i) $A=30^\circ,\ a=6,\ b=4$. (ii) $A=60^\circ, a=7,\ b=8$.

(iii) $A=45^\circ, a=2, b=8$. (iv) $A=30^\circ, a=3, b=6$.

Find in which case the solution is ambiguous, in which case there is one solution, and in which case there is no solution.

2. (i) If $b=2, c=\sqrt{3}+1$ and $B=45^\circ$, solve the triangle.

(ii) If $a=3, b=3\sqrt{3}, A=30^\circ$, find B.

3. If $a=2, b=\sqrt{6}, B=60^\circ$, solve the triangle.

4. If $a=2, b=5, A=30^\circ$, solve the triangle.

5. If b, c, B are given and if $b < c$, show that

$$(a_1-a_2)^2+(a_1+a_2)^2\tan^2 B=4b^2$$

a_1 and a_2 being the two possible values of a.

6. In the ambiguous case, given a, b and A, prove that the difference between the two values of c is

$$2\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}.$$

7. If a, b, A are given, and if c_1, c_2 are the values of the third side in the ambiguous case, prove that if $c_1 > c_2$,

(i) $c_1-c_2=2a\cos B_1$. [B. H. U. I. 1928]

(ii) $c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos 2A=4a^2\cos^2 A$.

[B. H. U. I. 1935 ; Pat. I. 1936]

(iii) $\cos\dfrac{C_1-C_2}{2}=\dfrac{b\sin A}{a}$. [A. I. 1941]

8. If $b=16$, $c=25$ and $B=33^\circ 15'$, find the other angles ; given

$L\sin 33^\circ 15'=9{\cdot}7390129$, $\log 2={\cdot}30103$,
$L\sin 58^\circ 57'=9{\cdot}9328376$, $L\sin 58^\circ 56'=9{\cdot}9327616$.

9. If $a=5$, $b=4$, $A=45^\circ$, find B and C ; given

$\log 2={\cdot}30103$, $L\sin 34^\circ 27'=9{\cdot}75257$.

10. If $a=30$, $b=300$, find A in order that B may be a right angle, having given that

$L\sin 5^\circ 44'=8{\cdot}9995595$, diff. for $1'=12565$.

11. If $a=16$, $c=25$ and $C=60^\circ$, find the other angles ; given

$\log 2 = \cdot 30103$. $\log 3 = \cdot 4771213$.

$L \sin 33^\circ \cdot 39' = 9\cdot 7436024$, diff. for $1' = 1897$.

12. If $b=165$, $c=258$, and $B=35^\circ\ 10'$, find the angles A and C ;

given $\log 1\cdot 65 = \cdot 21749$, $\log 2\cdot 58 = \cdot 41162$

$L \sin 35^\circ\ 10' = 9\cdot 76039$, $L \sin 64^\circ\ 14' = 9\cdot 95452$.

13. If $2b=3a$ and $\tan^2 A = \frac{3}{5}$, prove that there are two values of the third side, one of which is double the other.

14. If A_1, B_1 and A_2, B_2 are the angles of the two triangles in the ambiguous case where b, c, C are given,

$$\text{then } \frac{\sin A_1}{\sin B_1} + \frac{\sin A_2}{\sin B_2} = 2 \cos C.$$

15. Show that in the case that admits of two solutions the two values of C satisfy the equation

$$\frac{(a+b)^2}{1+\cos C} + \frac{(b-a)^2}{1-\cos C} = \frac{2a^2}{\sin^2 A}.$$ [B. H. U. I. 1942]

16. If $\log b + 10 = \log c + L \sin B$, can the triangle be ambiguous ?

ANSWERS

1. (i) One solution. (ii) Ambiguous ; two solutions.

(iii) No solution. (iv) One solution (right-angled triangle).

2. (i) $C=75^\circ$, $A=60^\circ$, $a=\sqrt{6}$ or, $C=105^\circ$, $A=30^\circ$, $a=\sqrt{2}$ (ii) 60°, or, 120°.

3. $A=45^\circ$, $B=75^\circ$, $c=\sqrt{3}+1$. (no ambiguity). **4.** Impossible.

8. $C=58^\circ\ 56'\ 56\cdot 3''$, $A=87^\circ\ 48'\ 3\cdot 7''$ or, $C=121^\circ\ 3'\ 3\cdot 7''$, $A=25^\circ\ 41'\ 56\cdot 3''$

9. $B=34^\circ\ 27'$, $C=100^\circ\ 33'$.

10. $A=5^\circ\ 44'\ 21''$. **11.** $A=33^\circ\ 39'\ 34''$, $B=86^\circ\ 20'\ 26''$.

12. $A=80^\circ\ 36'$, $C=64^\circ\ 14'$; or, $A=29^\circ\ 4'$, $C=115^\circ\ 46'$. **16.** No.

ষোড়শ অধ্যায়

উচ্চতা ও দূরত্ব বিষয়ক সরল প্রশ্নাবলী

(Simple problems on heights and distances)

16·1. ইতিপূর্বে পঞ্চম অধ্যায়ে উচ্চতা ও দূরত্ব সম্বন্ধীয় সহজ প্রশ্নমালায় ত্রিকোণমিতির সহজ ব্যবহারিক প্রয়োগ-সম্পর্কীয় আলোচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অনুচ্ছেদে যে উদাহরণগুলি দেওয়া হইয়াছে, তাহা আরও ব্যাপক এবং ইহাদের সমাধান করিবার জন্য ত্রিভুজের কোণ এবং বাহু সম্পর্কীয় সাধারণ সূত্রের প্রয়োগ এবং জ্যামিতিতে অধিকতর দক্ষতার প্রয়োজন হইবে।

16·2. অনুভূমিক সমতলে দণ্ডায়মান কোন দুর্গম বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় :

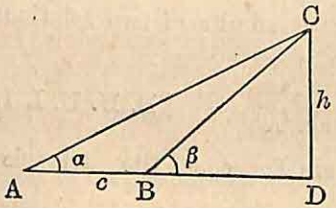


Fig. (i)

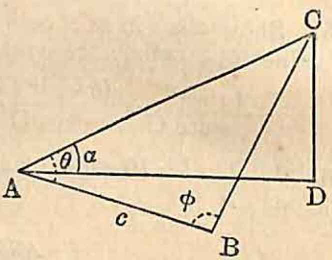


Fig. (ii)

মনে করি, অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত বস্তু CD-কে A হইতে দেখা যাইতেছে। C বিন্দুর উন্নতি কোণ α, CD-র নির্ণেয় উচ্চতা h, এবং A হইতে D-র দূরত্ব d, অর্থাৎ $AD = d$.

ক্ষেত্র I. সম্ভব হইলে, AD-র দিকে $AB(=c)$ অংশ কাটিয়া লওয়া হইল ; মনে করি, B হইতে C-র উন্নতি-কোণ β। এখন চিত্র (i) হইতে,

$$c = AD - BD = h \cot \alpha - h \cot \beta = h\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right) = \frac{h \sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$\therefore \quad h = c \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec} (\beta - \alpha).$$

এবং $d = AD = h \cot \alpha = c \cos \alpha \sin \beta \operatorname{cosec} (\beta - \alpha).$

দ্রষ্টব্য। উপরের প্রত্যেকটি রাশিমালাই লগারিদম্-এর সাহায্যে নির্ণয় করার পক্ষে বিশেষ উপযোগী।

ক্ষেত্র II. যদি AB-কে ঠিক AD-এর দিকে পরিমাপ করা সুবিধাজনক না হয়, তাহা হইলে আমরা নিম্নলিখিতভাবে অগ্রসর হইতে পারি :

A হইতে যে-কোনও সুবিধাজনক দিকে $AB = c$ কাটিয়া লওয়া হইল। মনে করি, A হইতে C-র উন্নতি-কোণ α ; A এবং B হইতে CAB এবং CBA কোণদ্বয় মাপিয়া লওয়া হইল। মনে করি, $\angle CAB = \theta$, $\angle CBA = \phi$.

এক্ষেত্রে চিত্র (ii) হইতে দেখা যায় যে, ABC ত্রিভুজে

$$\frac{AC}{\sin \phi} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{c}{\sin (180^\circ - \theta - \phi)} = \frac{c}{\sin (\theta + \phi)}$$

$\therefore \quad AC = c \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi).$

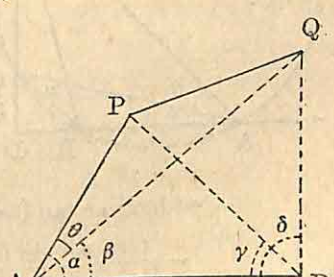
$\therefore \quad h = AC \sin \alpha = c \sin \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$

এবং $\quad d = AD = AC \cos \alpha = c \cos \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi).$

দ্রষ্টব্য। এক্ষেত্রেও নির্ণেয় রাশিগুলি লগারিদম্-এর সাহায্য-গ্রহণের উপযোগী।

16·3. দুইটি দৃশ্যমান দুর্গম বস্তুর দূরত্ব নির্ণয় :

দুইটি বস্তু P এবং Q-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। দুইটি সুবিধাজনক অবস্থান A এবং B লওয়া হইল ; উহাদের দূরত্ব কল্পনা করা হইল c-এর সমান। A বিন্দুতে উৎপন্ন তিনটি কোণ PAQ, PAB, QAB-এর মান নির্ণয় করা হইল এবং মনে করি উহাদের পরিমাপ θ, α এবং β। [A, B, P, Q বিন্দু চতুষ্টয় একই সমতলে অবস্থিত হইলে PAB কোণের পরিমাপ করা নিষ্প্রয়োজন, কারণ, $\angle PAB = \angle PAQ + \angle QAB$.]



মনে করি, B বিন্দুতে উৎপন্ন PBA, QBA কোণদ্বয়ের পরিমাপ যথাক্রমে γ এবং δ.

$\triangle PAB$ হইতে, $\dfrac{PA}{\sin \gamma} = \dfrac{c}{\sin (180^\circ - \alpha - \gamma)} = \dfrac{c}{\sin (\alpha + \gamma)}$.

$\therefore \quad PA = c \sin \gamma \operatorname{cosec} (\alpha + \gamma).$

অনুরূপভাবে, $\triangle QAB$ হইতে, $QA = c \sin \delta \operatorname{cosec} (\beta + \delta).$

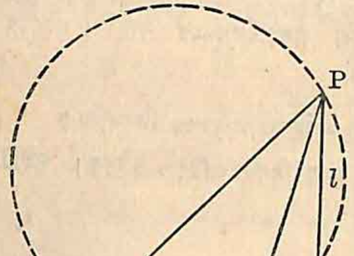
অবশেষে, $\triangle PAQ$ হইতে,

$$PQ^2 = PA^2 + QA^2 - 2PA.QA.\cos\theta.$$

এভাবে PQ নির্ণীত হইল।

16·4. নিম্নে উচ্চতা ও দূরত্ব সম্পর্কীয় কঠিনতর কতিপয় উদাহরণের সমাধান দেওয়া হইল।

Ex. 1. *A flagstaff is fixed on the top of a tower standing on a horizontal plane. An observer walking directly towards the foot of the tower, observes the angle subtended by the flagstaff from two positions on his path to be the same, namely θ. The distance between these two positions is d, and the angle subtended by the tower at his first position is α. Find the height of the tower and the length of the flagstaff.*



মনে করি, CD প্রদত্ত স্তম্ভ এবং PC প্রদত্ত দণ্ড; ইহাদের উচ্চতা যথাক্রমে h এবং l; A এবং B পর্যবেক্ষকের দুইটি অবস্থান। যেহেতু, $\angle PAC = \angle PBC = \theta$, অতএব, P, A, B, C সমবৃত্তীয় হইবে। সুতরাং, $\angle CBD = \angle APC = 90° - \angle PAD = 90° - (\theta + \alpha)$.

এক্ষণে, $d = AD - BD$
$= h \cot\alpha - h\cot(CBD)$

$$= h\{\cot\alpha - \tan(\theta+\alpha)\}.$$

$$= h\left\{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}\right\} = h\,\frac{\cos(\theta+2\alpha)}{\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)}.$$

$$\therefore\ h = d\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)\sec(\theta+2\alpha).$$

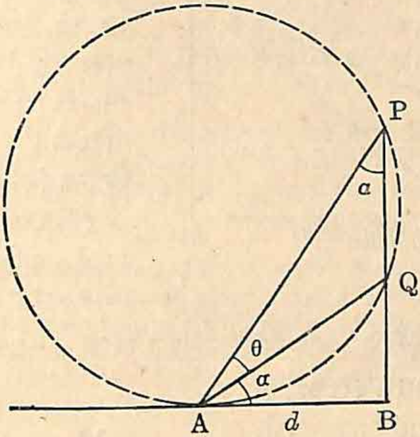
পুনরায়, $\triangle APC$ হইতে,

$$\frac{l}{\sin\theta} = \frac{AC}{\sin APC} = \frac{h}{\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)} = \frac{d}{\cos(\theta+2\alpha)}.$$

$$\therefore\ l = d\sin\theta\sec(\theta+2\alpha).$$

Ex. 2. *A man walking towards a building, on which a flagstaff is fixed, observes the angle subtended by the flagstaff to be greatest,*

when he is at a distance d from the building. If θ be the observed greatest angle, find the length of the flagstaff, and the height of the building.



QB প্রদত্ত গৃহ এবং PQ প্রদত্ত দণ্ড হইলে ইহা সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, P এবং Q-এর মধ্য দিয়া এবং পর্যবেক্ষকের পথরেখাকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত পথরেখাকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিলে, PQ দণ্ড A বিন্দুতেই বৃহত্তম কোণ উৎপন্ন করিবে।

অতএব, $\angle QAB = \angle APQ = \alpha$ ধরা হইলে,

$\angle PAB + \angle APB = 90^\circ$, বা $\theta + 2\alpha = 90^\circ \quad \cdots \quad$ (i)

এক্ষণে, $PQ = PB - QB = d \tan(\theta + \alpha) - d \tan \alpha$

$$= d\left\{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right\} = d\,\frac{\sin \theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos \alpha} = \frac{2d \sin \theta}{\cos(\theta+2\alpha) + \cos \theta}$$

$= 2d \tan \theta$ [(i)-এর সাহায্যে]

আবার, $QB = d \tan \alpha = d \tan(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta)$.

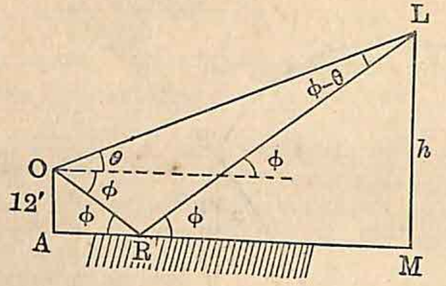
Ex. 3. *The angle of elevation of a light at the top of a distant tower from a point 12 ft. above a lake is 24°55′, and the angle of depression of its reflection in the lake is 35°5′. Find the height of the tower correct to two decimal places, having given*

$\log 2 = \cdot 30103 \qquad \log 3 = \cdot 47712$

$\log 588 = 2\cdot 76938 \qquad \log 589 = 2\cdot 77012$

$L \sin 10^\circ 10' = 9\cdot 24677.$

মনে করি, LM স্তম্ভের উপর L নির্দিষ্ট আলোকবর্তিকা, L হইতে একটি রশ্মি LRO হ্রদের R বিন্দুতে প্রতিফলিত হইয়া O বিন্দুতে অবস্থিত পর্যবেক্ষকের চক্ষে পড়িতেছে ; অতএব, পর্যবেক্ষক OR-এর দিকে প্রতিবিম্ব দেখিতে পাইবেন। সুতরাং, প্রতিফলনের নিয়মানুযায়ী, $\angle ORA = \angle LRM = \phi$, ধরা হইল। ইহাই প্রতিবিম্বের অবনতি-কোণ 35°5′-এর সমান।



O বিন্দু হইতে L-এর উন্নতি-কোণ θ হইলে, $\theta = 24°25'$.

এক্ষণে, $\triangle ORL$ হইতে,

$$\frac{RL}{\sin(\theta+\phi)} = \frac{OR}{\sin(\phi-\theta)} = \frac{12}{\sin\phi\,\sin(\phi-\theta)} \text{ ফুট ;}$$

$$\therefore\; h = LM = RL\sin\phi = 12\,\frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin(\phi-\theta)} = 12\,\frac{\sin 60°}{\sin(10°10')}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{\sin(10°10')} = \frac{2.3^{\frac{3}{2}}}{\sin(10°10')}.$$

$$\therefore\; \log h = \log(2.3^{\frac{3}{2}}) - \log\sin(10°10')$$
$$= \log 2 + \tfrac{3}{2}\log 3 + 10 - L\sin 10°10'$$
$$= \cdot30103 + \tfrac{3}{2}(\cdot47712) + 10 - 9\cdot24677$$
$$= 1\cdot76994.$$

প্রদত্ত রাশিমালা হইতে ইহা সিদ্ধান্ত করা যায় যে, $\log h$-এর মান $\log 58\cdot8$ এবং $\log 58\cdot9$-এর মধ্যবর্তী। $\therefore\; h = 58\cdot8 + x$ ধরিলে,

$\cdot1$-এর জন্য অন্তর $= 1\cdot77012 - 1\cdot76938 = \cdot00074$,

এবং, x-এর জন্য অন্তর $= 1\cdot76994 - 1\cdot76938 = \cdot00056$.

সুতরাং, সমানুপাতের নিয়মানুসারে,

$$\frac{x}{\cdot1} = \frac{56}{74} = \cdot75, \qquad \therefore\; x = \cdot075 = \cdot08 \text{ (আসন্ন মান)}$$

অতএব, $h = 58\cdot88$ ফুট।

Examples XVI

1. The angle of elevation of the top of a palm tree standing on horizontal ground, observed from two points A and B, distant 40 and 30 feet from the foot, and in the same straight line with it are found to be complementary. Prove that the height of the tree is nearly 35 feet, and that the angle subtended at the top of the tree by the line AB is $\sin^{-1}\frac{1}{7}$.

2. The angles of elevation of an aeroplane from two places one mile apart and from a point half way between them are found to be 60°, 30° and 45° respectively. Show that the height of the aeroplane is $440\sqrt{6}$ yards.

3. A building with ten storeys, each of equal height x ft., stands on one side of a wide street, and from a point on the other side of the street directly opposite to the building, it is observed that the three uppermost storeys together and the two lowest storeys together subtend equal angles. Show that the width of the street is $x\sqrt{140}$ ft.

4. A two-storeyed building has the height of its lower storey 12 ft. and that of the upper storey 13 ft.. Find at what distance the two storeys subtend equal angles to an observer's eye at a height 5 feet from the ground.

5. A vertical rod is erected in a horizontal rectangular field ABCD. The angular evevation of its top from A, B, C, D are $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Show that

$$\cot^2\alpha - \cot^2\beta = \cot^2\delta - \cot^2\gamma.$$

6. The angles of elevation of a bird flying in a horizontal straight line, from a fixed point at four successive observations are $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, the observations being taken at equal intervals of time. Assuming that the speed of the bird is uniform, show that

$$\cot^2\alpha - \cot^2\delta = 3(\cot^2\beta - \cot^2\gamma).$$

7. A man on a hill observes that three towers on a horizontal plane subtend equal angles at his eye and that the angles of depression of their bases are α, β, γ. If a, b, c are the heights of the towers, prove that

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{a\sin\alpha} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{b\sin\beta} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{c\sin\gamma} = 0.$$

8. A gun is fired from a fort F at a distance d from a station O, and from two stations A and B in a straight line with O and distant a and b respectively from O, the intervals between seeing the flash and hearing the report are t and t'. Show that the velocity of sound is

$$\sqrt{\frac{(d^2-ab)(a-b)}{at'^2-bt^2}}.$$

9. A person observes the elevation of the top of a telegraph post which is E. S. E. of him to be 45°, and at noon, the extremity of its shadow is to the N. E. of him ; if the length of the shadow be x, show that the height of the post is $x\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

10. A straight tree on the horizontal ground leans towards the North ; at two points due South and distant a, b respectively from the foot, the angular elevations of the top of the tree are α and β. Show that the inclination of the tree to the horizon is

$$\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{a\cot\beta-b\cot\alpha}\right).$$

11. An observer on a carriage moving with a speed V along a straight road observes in one position that two distant trees are in the same line with him which is inclined at an angle θ to the road. After a time t, he observes that the trees subtend their greatest angle ϕ ; show that the distance between the trees is

$$2Vt\sin\theta\sin\phi/(\cos\theta+\cos\phi).$$

12. A train travelling on one of two straight intersecting railways subtends at a certain station on the other line, angles α and β, when the front of the first carriage and the end of the last carriage reach the junction respectively. Show that the angle of intersection of the two lines is

$$\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha\sim\beta)}.$$

13. Two vessels are sailing in parallel directions, and at one instant the bearing of one from the other is $\alpha°$ N. of E. After an hour's sailing the bearing of the first from the second is $\beta°$ N of E. and after another hour the bearing is $\gamma°$ N. of E. Show that the vessels are sailing in a direction $\theta°$ N. of E., where

$$\sin(\alpha-\theta)\sin(\gamma-\beta)=\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\theta).$$

14. A rod of given length can turn in a vertical plane passing through the sun, one end being fixed on the ground ; if the

longest shadow it can cast is $3\frac{1}{3}$ times the length of the rod, calculate the altitude of the sun, having given

$$\log 3 = \cdot 47712,\ L \cos 72^\circ\ 32'\ 30'' = 9\cdot 47712.$$

15. A ship sailing N. E. is, at a particular moment, in a line with two light-houses, one of which is situated 5 miles due N. of the other. In 3 minutes and also in 21 minutes the light-houses are found to subtend a right angle at the ship. Prove that the ship is sailing at the rate of 10 miles an hour, and that the light-houses subtend their greatest angle at the ship at the end of $3\sqrt{7}$ minutes.

16. A parachute was observed in the N. E. at the elevation 45°; ten minutes afterwards it was found to be due N. at an elevation $22\frac{1}{2}^\circ$. The parachute was descending at the rate of 6 miles per hour, and was all along drifted uniformly towards the west by the wind. Show that wind blows at the rate of 6 miles per hour.

17. A person wishing to determine the height of a distant temple observes the elevation of its top from a point on the horizontal ground through its base to be 30°. On walking a distance $80\sqrt{3}$ ft. in a certain direction, he finds the elevation of the top to be the same as before, and then on walking a distance 80 ft. at right angles to the former direction, the elevation is found to be 45°. Show that the height of the temple is 80 ft.

18. The shadow of a telegraph post is observed to be half the known height of the post, and sometime afterwards it is equal to the known height; how much will the sun have gone down in the interval, given

$$\log 2 = \cdot 30103,\ L \tan 63^\circ\ 26' = 10\cdot 3009994$$

$$\text{and}\quad \text{diff. for } 1' = 3159.$$

19. The side of a hill faces due S., and is inclined to the horizon at an angle α. A straight railway upon it is inclined at an angle β to the horizon; show that the bearing of the railway is

$$\cos^{-1}(\cot\alpha \tan\beta) \text{ E. of N.}$$

20. A spherical time-ball of diameter d at the top of a tower subtends an angle 2α at a point on the ground from which the elevation of its centre is θ; prove that the height of the centre of the ball above the ground is $\frac{1}{2}d \sin\theta \operatorname{cosec}\alpha$.

ANSWERS

4. $\sqrt{2135}$ ft. **14.** $17^\circ\ 27'\ 30''$. **18.** $18^\circ\ 26'\ 5\cdot 8''$ nearly.

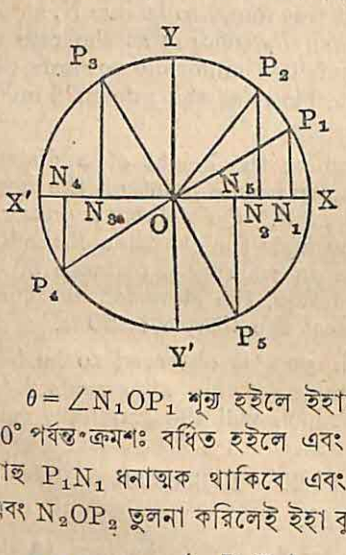
সপ্তদশ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ

(Graphs of Trigonometrical Functions)

17·1. কোন কোণ 0° হইতে 360° পর্যন্ত ক্রমশঃ বর্ধিত হইলে কোণানুপাতের ক্রমিক পরিবর্তন।

মনে করি যে, একটি আবর্তনকারী রেখা OX অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমান্বয়ে 0° হইতে 360° পর্যন্ত আবর্তন করে।



O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। বিভিন্ন অবস্থায় $\angle XOP_1$-এর কোণানুপাত নির্ণয় করিতে আমরা OP_1-কে বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান ধরিয়া লইতে পারি।

(i) সাইনের পরিবর্তন ঃ

$\theta = \angle N_1OP_1$ শূন্য হইলে ইহার সাইন শূন্য হইবে। কোণটি 0° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমশঃ বর্ধিত হইলে এবং অতিভুজ OP_1 সমান থাকিলে, বিপরীত বাহু P_1N_1 ধনাত্মক থাকিবে এবং ক্রমশঃ বর্ধিত হইবে (ত্রিভুজ N_1OP_1 এবং N_2OP_2 তুলনা করিলেই ইহা বুঝিতে পারা যায়)।

অতএব, $\sin\theta \left(=\frac{P_1N_1}{OP_1}\right)$ ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইবে এবং যখন $\theta = 90°$ হইবে তখন P_2N_2 এবং OP_2 উভয়েই OY-এর সহিত মিলিয়া যাইবে। তখন $\sin\theta$-র মান হইবে বৃহত্তম এবং 1-এর সমান।

θ ক্রমশঃ 90° হইতে 180° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, OP_3 অতিভুজের মান অপরিবর্তিত থাকিবে বটে, কিন্তু P_3N_3-র মান ধনাত্মক থাকিয়া OY-হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে হইতে অবশেষে শূন্য হইবে। অতএব, $\sin\theta$-র মান 1 হইতে ক্রমশঃ শূন্য হইবে। তৃতীয় পাদে যখন θ ক্রমশঃ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বর্ধিত হয়, তখন ঋণাত্মক থাকিয়া P_4N_4-এর আঙ্কিক মান ক্রমশঃ 0 হইতে OY'-এ

পরিবর্তিত হয়। কিন্তু অতিভুজের মান ধনাত্মক এবং অপরিবর্তিত থাকে। তখন $\sin\theta$ হইবে ঋণাত্মক এবং তাহার আঙ্কিক মান শূন্য হইতে এক পর্যন্ত ক্রমশঃ পরিবর্তিত হইবে; অর্থাৎ ইহার মান ক্রমশঃ শূন্য হইতে -1 পর্যন্ত কমিতে থাকিবে। চতুর্থ পাদে θ যখন 270° হইতে 360° পর্যন্ত ক্রমশঃ বর্ধিত হয়, তখন Q_5N_5 ঋণাত্মক থাকে কিন্তু উহার মান OY' হইতে শূন্যে হ্রাস পাইতে থাকে; অতএব, $\sin\theta$-র মান ঋণাত্মক থাকিয়া -1 হইতে শূন্য পর্যন্ত বর্ধিত হইবে। অতএব, ফলাফল নিম্নলিখিতভাবে উল্লেখ করা যায়ঃ

প্রথম পাদে θ যখন 0° হইতে 90° পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়,
$\sin\theta$ তখন **0 হইতে 1** পর্যন্ত **বর্ধিত হয়।**

দ্বিতীয় পাদে θ যখন 90° হইতে 180° পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়,
$\sin\theta$ তখন **1 হইতে 0** পর্যন্ত **কমিতে থাকে।**

তৃতীয় পাদে θ যখন 180° হইতে 270° পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়,
$\sin\theta$ তখন **0 হইতে -1** পর্যন্ত **কমিতে থাকে।**

চতুর্থ পাদে θ যখন 270° হইতে 360° পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়,
$\sin\theta$ তখন **-1 হইতে 0** পর্যন্ত **বৃদ্ধি পায়।**

(ii) কোসাইনের পরিবর্তন :

প্রথম পাদে, $\angle XOP_1$ ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইলে, ON_1 ক্রমশঃ কমিতে থাকে; $\theta=0$ হইলে, $ON_1=OX$ এবং $\theta=90^\circ$ হইলে, $ON_1=0$ অর্থাৎ ON_1 সর্বদা ধনাত্মক হইবে। দ্বিতীয় পাদে, θ যখন 90° হইতে 180° পর্যন্ত ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়, তখন ON_3-এর আঙ্কিক মান 0 হইতে OX' পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় কিন্তু সর্বদা ঋণাত্মক থাকে। তৃতীয় পাদে ON_4 ঋণাত্মক থাকে, কিন্তু ইহার আঙ্কিক মান OX' হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইতে থাকে। চতুর্থ পাদে, ON_5 ধনাত্মক এবং শূন্য হইতে OX পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়। এই পরিবর্তনের সময় অতিভুজ সর্বদাই ধনাত্মক থাকিবে এবং তাহার মান OX বা OX'-এর সমান হইবে।

অতএব, আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হইঃ

θ ক্রমশঃ **0° হইতে 90°** পর্যন্ত বর্ধিত হইলে,
$\cos\theta$ ক্রমশঃ **1 হইতে 0** পর্যন্ত **হ্রাস পাইবে।**

θ ক্রমশঃ **90° হইতে 180°** পর্যন্ত বর্ধিত হইলে,
$\cos\theta$ ক্রমশঃ **0 হইতে -1** পর্যন্ত **হ্রাস পাইবে।**

θ ক্রমশঃ $180°$ **হইতে** $270°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে,

$\cos\theta$ ক্রমশঃ -1 **হইতে** 0 পর্যন্ত **বৃদ্ধি পাইবে।**

θ ক্রমশঃ $270°$ **হইতে** $360°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে,

$\cos\theta$ ক্রমশঃ 0 **হইতে** 1 পর্যন্ত **বৃদ্ধি পাইবে।**

(iii) ট্যানজেণ্টের পরিবর্তন :

প্রথম পাদে, θ যখন $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়, তখন P_1N_1 ক্রমশঃ 0 হইতে OY পর্যন্ত বর্ধিত হয় এবং সঙ্গে সঙ্গে ON_1, OX হইতে শূন্যতে হ্রাস পায়, কিন্তু উভয়েই ধনাত্মক থাকে। অতএব, $\tan\theta = \frac{P_1N_1}{ON_1}$-এর মান $\frac{0}{OX} = 0$ হইতে $\frac{OY}{0}$ বা ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

দ্বিতীয় পাদে P_3N_3, OY হইতে শূন্য পর্যন্ত হ্রাস পায়; কিন্তু ঋণাত্মক থাকিয়া ON_3-এর আঙ্কিক মান 0 হইতে OX পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়। অতএব, $\tan\theta \left(= \frac{P_3N_3}{ON_3}\right)$ ঋণাত্মক হইবে, কিন্তু আঙ্কিক মান ∞ হইতে শূন্য পর্যন্ত হ্রাস পাইবে; অর্থাৎ $\tan\theta$, $-\infty$ হইতে 0 পর্য্যন্ত বর্ধিত হইবে।

$90°$-র অব্যবহিত পূর্ব পর্যন্ত $\tan\theta$ ধনাত্মক এবং উহার মান অত্যন্ত বৃহৎ; কিন্তু $90°$-র অব্যবহিত পরে $\tan\theta$ ঋণাত্মক এবং উহার আঙ্কিক মান অত্যন্ত বৃহৎ। কাজেই যখন θ-র মান $90°$ স্পর্শ করিয়া প্রথম পাদ হইতে দ্বিতীয় পাদে যাইবে, তখন $\tan\theta$-র মান অতি বৃহৎ ধনাত্মক রাশি হইতে অতি বৃহৎ ঋণাত্মক রাশিতে অকস্মাৎ পরিবর্তিত হইবে। ইহার ফলে $\tan\theta$-র মানের মধ্যে অকস্মাৎ পরিবর্তন বা অসন্ততি (discontinuity) দেখা যাইবে।

তৃতীয় পাদে, P_4N_4 এবং ON_4 উভয়েই ঋণরাশি। P_4N_4-এর আঙ্কিক মান 0 হইতে OY′-এ বৃদ্ধি পাইবে কিন্তু ON_4-এর আঙ্কিক মান OX′ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইবে। অতএব, $\tan\theta \left(= \frac{P_4N_4}{ON_4}\right)$ ধনাত্মক এবং 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হইবে।

চতুর্থ পাদে, P_5N_5 ঋণরাশি এবং উহার আঙ্কিক মান OY′ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায়। কিন্তু ON_5 ধনরাশি এবং 0 হইতে OX পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়। অতএব, $\tan\theta \left(\frac{P_5N_5}{ON_5}\right)$ ঋণরাশি এবং উহার আঙ্কিক মান ∞ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায় অর্থাৎ $\tan\theta$, $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

$270°$ অতিক্রম কালে, আরও একটি অসন্ততি দেখা যায় এবং $\tan\theta$ অসীম রাশি অতিক্রমকালে অকস্মাৎ ধনরাশি হইতে ঋণরাশিতে পরিবর্তিত হয়।

অতএব, আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হই :

θ, $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\tan\theta$, 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

θ, $90°$ অতিক্রমকালে $\tan\theta$ অকস্মাৎ $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

θ, $90°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\tan\theta$, $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

θ, $180°$ হইতে $270°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\tan\theta$, 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

θ, $270°$ অতিক্রমকালে, $\tan\theta$ অকস্মাৎ $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

θ, $270°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\tan\theta$, $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

(iv) কো-ট্যানজেন্টের পরিবর্তন :

ট্যানজেন্টের মানের পরিবর্তন হইতে $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ -র মানের পরিবর্তন আলোচনা করা যায়।

θ, $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে, $\cot\theta$, ∞ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইবে।

θ, $90°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে, $\cot\theta$,.0 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পাইবে।

θ, $180°$ অতিক্রমকালে, $\cot\theta$ অকস্মাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

θ, $180°$ হইতে $270°$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে, $\cot\theta$, ∞ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইবে।

θ, $270°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে, $\cot\theta$, 0 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পাইবে।

θ, $360°$ অতিক্রমকালে $\cot\theta$ অকস্মাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ তে পরিবর্তিত হইবে।

(v) সেকান্টের পরিবর্তন :

$\sec\theta\left(=\frac{1}{\cos\theta}\right)$ সম্পর্কে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় :

θ, $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\sec\theta$, 1 হইতে ∞ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়। এখানে, $\sec\theta$ অকস্মাৎ $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

তারপর, θ, $90°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\sec\theta$, $-\infty$ হইতে -1 পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

θ, $180°$ হইতে $270°$ পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\sec\theta$, -1 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পায়।

এখানে পুনরায় $\sec\theta$ অকস্মাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ তে পরিবর্তিত হয়। তারপর $270°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত $\sec\theta$, $+\infty$ হইতে 1 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

(vi) কোসেকান্টের পরিবর্তন :

$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$ সম্পর্কিত সিদ্ধান্তগুলি নিম্নরূপ :

$0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত $\operatorname{cosec}\theta$ ক্রমশঃ ∞ হইতে 1 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

$90°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত $\operatorname{cosec}\theta$ ক্রমশঃ 1 হইতে ∞ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

এখানে, $\operatorname{cosec}\theta$ অকস্মাৎ $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

তারপর, $180°$ হইতে $270°$ পর্যন্ত $\operatorname{cosec}\theta$ ক্রমশঃ $-\infty$ হইতে -1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় ; এবং, $270°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত $\operatorname{cosec}\theta$ ক্রমশঃ -1 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পায়। θ, $360°$ অতিক্রমকালে $\operatorname{cosec}\theta$ পুনরায় অকস্মাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

দ্রষ্টব্য। θ, 2π-এর অখণ্ড গুণিতক দ্বারা বর্ধিত হইলে সমস্ত কোণানুপাত অপরিবর্তিত থাকিবে। সুতরাং, $360°$-র পরে θ বর্ধিত হইতে থাকিলে ঘূর্ণ্যমান রেখার এক একটি পূর্ণ আবর্তনের ফলে কোণানুপাতগুলির মানের একই শ্রেণীরই বারংবার পুনরাবৃত্তি ঘটিবে। সুতরাং, সমস্ত কোণানুপাতগুলিই পটাবৃত্ত অপেক্ষক (periodic function) এবং পটাবৃত্তি (period) 2π-এর সমান*।

কোণানুপাতের উল্লিখিত পরিবর্তনগুলি লেখ-র (graphs) সাহায্যে আরও সুপরিস্ফুটভাবে প্রকাশ করা যায়।

---

* $\tan\theta$ এবং $\cot\theta$-র পটাবৃত্তি (period) π.

17·2. ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ (Graphs of Trigonometrical Functions) :

বীজীয় অপেক্ষকের (algebraic function) ন্যায় ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকও (যথা : $\sin x, \cos x, \sin^2 2x + \tan \frac{x}{2}$, ইত্যাদি) লেখ সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এই সমস্ত লেখ-র সাহায্যে কোণের পরিবর্তনে কোণানুপাতের কিরূপ পরিবর্তন হয়, তাহা প্রকাশ করা হয়। ইহার প্রণালী বীজগণিতে অনুসৃত প্রণালীর অনুরূপ। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী লম্ব সরলরেখা অক্ষরেখারূপে গৃহীত হইল। x – অক্ষরেখার দিকে যথোপযুক্ত একক লইয়া কোণ স্থাপিত করা হইল (OX-এর দিকে কোণের মান ধনাত্মক এবং OX′-এর দিকে ঋণাত্মক হইবে), এবং y-অক্ষরেখার দিকে কোণের সংশ্লিষ্ট অপেক্ষকের মান যথোপযুক্ত এককের সাহায্যে স্থাপিত করা হইল, (OY-এর দিকে অপেক্ষকের মান ধনাত্মক এবং OY′-এর দিকে ঋণাত্মক)। এভাবে অঙ্কিত বিন্দুগুলির ভুজ (abscissa) এবং কোটি (ordinate) যথাক্রমে কোণ এবং অপেক্ষকের মান সূচিত করিবে।

এইভাবে, অনেকগুলি বিন্দু স্থাপন করিয়া উহাদিগকে স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখা (সরলরেখা ব্যতীত অন্য রেখা হইলেও তাহা) দ্বারা যুক্ত করিলে আমরা উদ্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ পাইব।

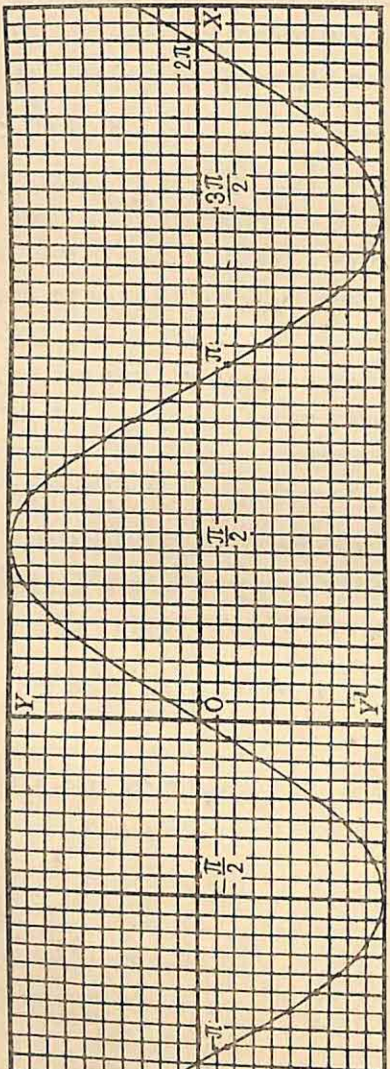
17·3. sin x-এর লেখ (Graph of sin x বা sine-graph) :

মনে করি, $y = \sin x$.

স্বাভাবিক সাইনের তালিকার সাহায্যে 10° ব্যবধানে x এবং y-এর অনুরূপ মানের তালিকা প্রস্তুত করা হইল (y-এর দুই দশমিক পর্যন্ত বিশুদ্ধ মান গৃহীত হইল)।

x	−90°	−80°	−70°	−60°	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°	0°
y or $\sin x$	−1	−·98	−·94	−·87	−·77	−·64	−·50	−·34	−·17	0

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	etc.
y or $\sin x$	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1	·98	·94	·87	etc.



Sine-Graph

আমরা OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু $10°$-এর সমান এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের 10-টি বাহুকে একক কল্পনা করিলাম।*

এক্ষণে উপরের তালিকাভুক্ত মানের সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলি ছক-কাগজে স্থাপন করিয়া উহাদিগকে স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে।

পার্শ্বের পৃষ্ঠায় $x = -180°$ হইতে $x = +360°$ পর্যন্ত মান লইয়া অঙ্কিত লেখ দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য 1. স্বাভাবিক সাইনের তালিকায় $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত সাইনের মান দেওয়া থাকে। এতদ্ব্যতীত $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$, ইত্যাদি সূত্রাবলীর [পঞ্চম অধ্যায়ে প্রদত্ত] সাহায্যে $(0°, 90°)$ সীমাবহির্ভূত কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করা যায়।

অন্যান্য অপেক্ষকের লেখ অঙ্কিত করিবার সময়ও অনুরূপভাবে কোণানুপাতের তালিকা প্রস্তুত করা যায়।

দ্রষ্টব্য 2. সাইন লেখ-র বৈশিষ্ট্য :

চিত্র হইতে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য লক্ষিত হয় :—

(i) লেখটি সন্তত (continuous) এবং ঢেউ-এর ন্যায় (wavy) হইবে।

(ii) $\sin x$-এর বৃহত্তম মান '1' এবং ক্ষুদ্রতম মান '-1' এবং যখন x-এর মান $90°$-র অযুগ্ম গুণিতক, তখন $\sin x$-এর মান এইরূপ হইবে।

(iii) মূলবিন্দু O এবং যে সমস্ত বিন্দুতে x-এর মান π-এর গুণিতক, সেই সমস্ত বিন্দুতে $\sin x = 0$.

(iv) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(-x) = -\sin x = \sin(\pi + x)$ ইত্যাদি।

(v) যেহেতু $\sin(2r\pi + x) = \sin x$, $x = 0$ এবং $x = 2\pi$-এর মধ্যবর্তী লেখ-র অংশটুকুরই উভয় দিকে বারংবার পুনরাবৃত্তি হইবে।

---

* প্রাপ্ত ছক-কাগজ এবং যে সীমার মধ্যে লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে তাহাদের উপর নির্ভর করিয়া প্রতিটি ক্ষেত্রে উপযুক্ত একক নির্ণয় করিতে হইবে।

17·4. কোসাইনের লেখ (Graph of cos x বা cosine-graph) :

মনে করি যে, $y = \cos x$.

স্বাভাবিক কোসাইনের তালিকার সাহায্যে (পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের দ্রষ্টব্য 1 লক্ষণীয়) 10° ব্যবধানে x এবং y-এর অনুরূপ মানের নিম্নলিখিত তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	−90°	−80°	−70°	−60°	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°
y or $\cos x$	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	etc.
y or $\cos x$	1	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0	−·17	−·34	etc.

এক্ষণে OX-এর দিকের ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু 10° এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের দশটি বাহু একক ধরিয়া উপরের তালিকাভুক্ত মানের সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলি ছক-কাগজে স্থাপন করিয়া উহাদিগকে স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখাদ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে।

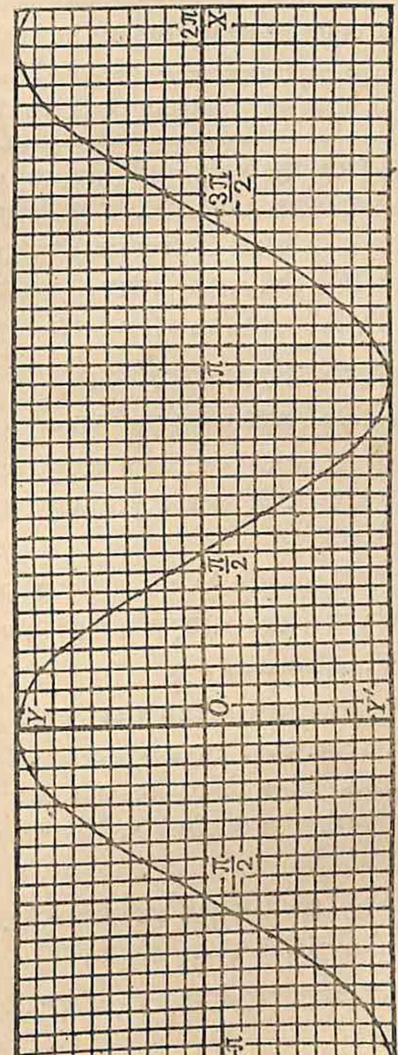
পার্শ্বের পৃষ্ঠায় $x = -\pi$ হইতে $x = 2\pi$ পর্যন্ত মান লইয়া অঙ্কিত লেখ দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য : চিত্র হইতে ইহা স্পষ্টই দেখা যায় যে, **সাইন লেখকে সমগ্র-ভাবে 90° পশ্চাতে (বামদিকে) অপসৃত করিলে ইহা অবিকল কোসাইন লেখ হইবে।**

ইহার কারণ এই যে, $\sin (90° + x) = \cos x$ বা $\sin x = \cos (x - 90°)$ হওয়ার দরুণ x-এর কোন একটি মানের জন্য সাইন লেখ-র কোটি $= x$-এর মান পূর্বক্ষেত্র অপেক্ষা 90° কম হইলে কোসাইন লেখ-র কোটি।

17·5. ট্যানজেন্টের লেখ (Graph of tan x বা tangent-graph) :

স্বাভাবিক ট্যানজেন্টের তালিকার সাহায্যে 10° ব্যবধানে x-এর মান ধরিয়া x এবং y-এর অনুরূপ মানের নিম্নলিখিত তালিকা প্রস্তুত করা হইল।



Cosine-Graph

x	$-20°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$	$100°$	etc.
y or $\tan x$	$-·36$	$-·18$	0	·18	·36	·58	·84	1·19	1·73	2·75	5·67	∞	$-5·67$	etc.

এক্ষণে OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু 10° এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের তিনটি বাহু একক ধরিয়া উপরের তালিকাভুক্ত মানের সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলি ছক-কাগজে স্থাপন করিয়া উহাদিগকে স্বাধীনভাবে অঙ্কিত বক্ররেখার দ্বারা সংযুক্ত করিলে উদ্দিষ্ট লেখ পাওয়া যাইবে। পার্শ্বের পৃষ্ঠায় x-এর মান $-\pi$ হইতে 2π পর্যন্ত ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিয়া দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য : ট্যানজেন্টের লেখ-র বিশেষত্ব।

লেখ হইতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি লক্ষ্য করা যায় :

(i) লেখ সন্তত (continuous) নয় ; ইহার কয়েকটি ভিন্ন ভিন্ন শাখা আছে এবং অসন্ততি লক্ষিত হয় সেই সমস্ত বিন্দুতে যাহাদের ভুজ (x-স্থানাঙ্ক) $\frac{1}{2}\pi$-এর অযুগ্ম গুণিতক।

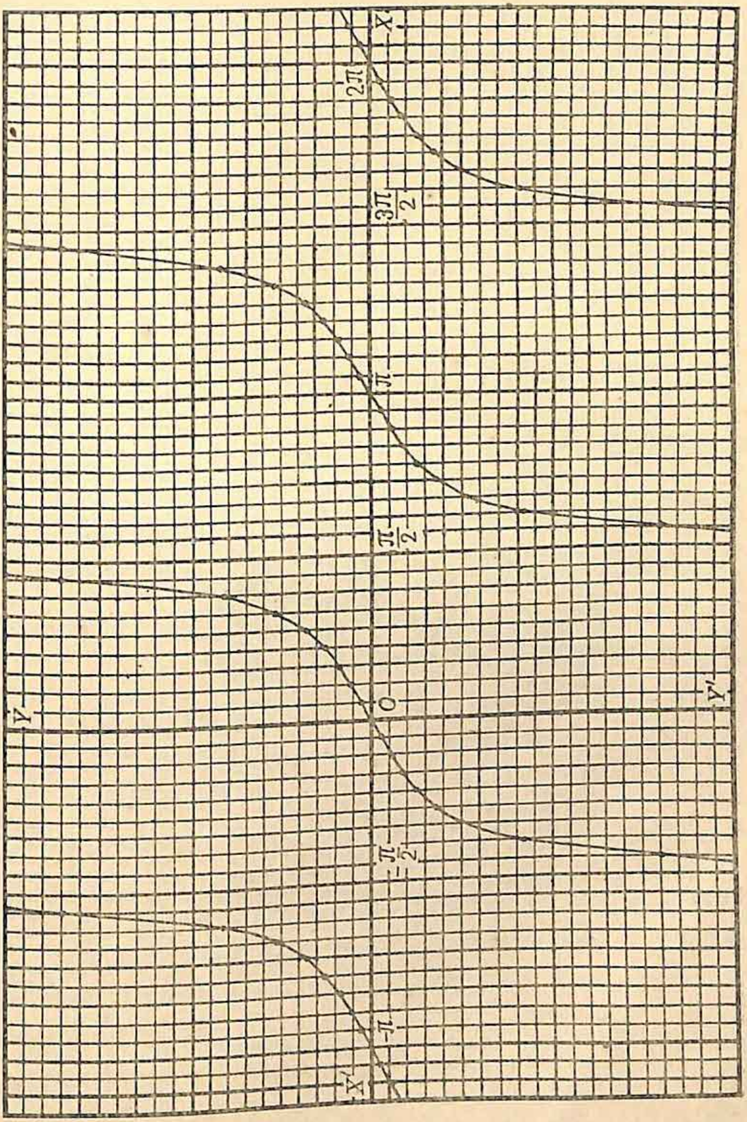
(ii) বামদিক হইতে ডানদিকে যখন x এই সমস্ত বিন্দু অতিক্রম করে, তখন $\tan x$ অকস্মাৎ বামদিকের অতিবৃহৎ ধনাত্মক মান হইতে ডানদিকের অতিবৃহৎ ঋণাত্মক মানে পরিবর্তিত হয়।

(iii) x-এর মান $\frac{1}{2}\pi$-এর অযুগ্ম গুণিতক ধরিয়া অঙ্কিত y-অক্ষরেখার সহিত সমান্তরাল সরল রেখাগুলি ক্রমশঃ লেখর সহিত উভয় দিকে মিলিত হইতে চেষ্টা করে, কিন্তু বাস্তবে কখনও মিলিত হয় না। এই সমস্ত সরলরেখাকে বক্ররেখার (এস্থলে ট্যানজেন্টের লেখটির) অসীমস্পর্শক (Asymptote) বলা হয়।

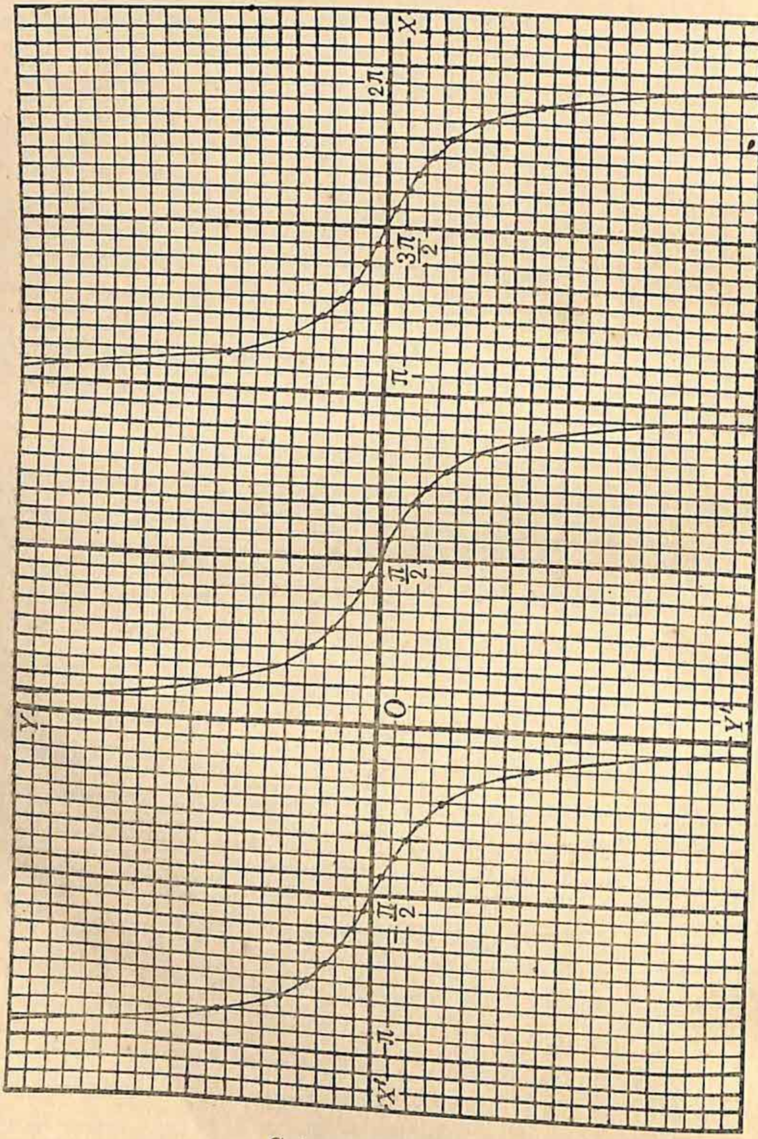
(iv) $\tan(n\pi + x) = \tan x$ বলিয়া, প্রত্যেকটি শাখা, লেখটির $x = -\frac{1}{2}\pi$ এবং $x = \frac{1}{2}\pi$-এর মধ্যবর্তী অংশের পুনরাবৃত্তি মাত্র।

17·6. কো-ট্যানজেন্টের লেখ (Graph of cot x বা cotangent-graph) :

পূর্বের ন্যায় x এবং y $(=\cot x)$-এর যথাযথ মানের তালিকা প্রস্তুত করিয়া ট্যানজেন্ট লেখ-র অনুরূপ একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপনের পর স্বাধীন-ভাবে অঙ্কিত রেখার সাহায্যে উহাদিগকে সংযুক্ত করিলে উদ্দিষ্ট লেখ পাওয়া যাইবে। পরপৃষ্ঠায় $x = -\pi$ হইতে $x = 2\pi$ পর্যন্ত লেখ দেখান হইয়াছে।



Tangent-Graph



Cotangent-Graph

ট্যানজেণ্টের লেখ-র ন্যায় ইহাও অসন্তত; $x=0$ বা $n\pi$ হইলে এই অসন্ততি পরিলক্ষিত হয়। $x=0$ এবং $x=\pi$ -এর অন্তর্গত অংশেরই উভয় দিকে ক্রমাগত পুনরাবৃত্তি হইবে। ইহা $\cot(n\pi+x)=\cot x$ সূত্র হইতে সহজেই লক্ষ্য করা যায়।

17·7. কো-সেকাণ্টের লেখ (Graph of cosec x বা cosecant-graph) :

মনে করি, $y=\operatorname{cosec} x$.

অতঃপর, x-এর মান $10°$ অন্তর ধরিয়া x এবং y-এর মানের নিম্নলিখিত তালিকা গঠন করা হইল :

x	$-20°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$	etc.	$80°$	$90°$	$100°$	$110°$	etc.
y or cosec x	$-2·92$	$-5·76$	∞	$5·76$	$2·92$	2	etc.	$1·02$	1	$1·02$	$1·06$	etc.

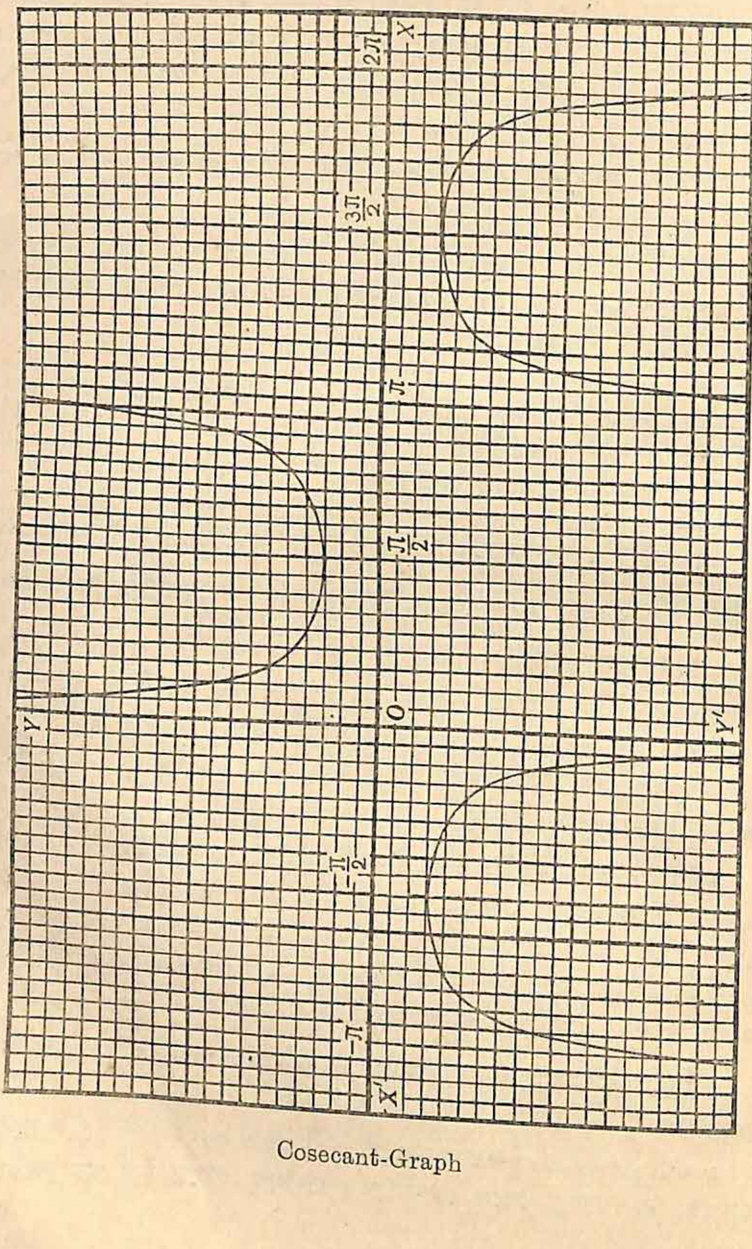
[স্বাভাবিক কো-সেকাণ্টের তালিকা পাওয়া না গেলে স্বাভাবিক সাইনের তালিকা হইতে $\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$ এই সূত্রের সাহায্যে কোসেকাণ্টের তালিকা গঠন করা যাইতে পারে।]

OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটী বাহু $10°$ এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের তিনটি বাহু একক ধরিয়া তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করিবার পর স্বাধীন-ভাবে অঙ্কিত রেখার দ্বারা যুক্ত করা হইল। $x=-\pi$ হইতে $x=2\pi$ পর্যন্ত লেখ পরপৃষ্ঠায় দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য : এই লেখটিও কতকগুলি বিচ্ছিন্ন অংশের সমষ্টি এবং $x=0$ বা π-এর গুণিতক হইলে অসন্ততি দেখা যায়। y-এর মান কখনও ± 1 -এর অন্তর্বর্তী হইবে না; ইহা সর্বদা '1' হইতে বৃহত্তর বা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। $x=0$ বা $n\pi$, এই রেখাগুলি অসীম স্পর্শক। $x=0$ এবং $x=2\pi$ -এর মধ্যবর্তী অংশটি উভয় দিকে ক্রমাগত পুনরঙ্কিত হইতে থাকিবে।

17·8. সেকাণ্টের লেখ (Graph of sec x বা secant-graph) :

x এবং y $(=\sec x)$ -এর মানের তালিকা প্রস্তুত করা হইল। (সেকাণ্টের তালিকা না পাওয়া গেলে কোসাইনের তালিকা হইতে ইহা গঠন করিতে



Cosecant-Graph

হইবে।) কোসেকান্টের লেখ-র অনুরূপ স্কেলে বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে উদ্দিষ্ট লেখ পাওয়া যাইবে। পরবর্তী পৃষ্ঠায় $x=-\pi$ হইতে $x=2\pi$ পর্যন্ত লেখ দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য ঃ চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, কোসেকান্টের লেখকে 90° বামদিকে অপসারণ করিলে অবিকল সেকান্ট লেখ পাওয়া যায়।

ইহার কারণ $\operatorname{cosec}(90°+x)=\sec x$. [17·4 অনুচ্ছেদের দ্রষ্টব্য লক্ষণীয়]

17·9. অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক রাশিমালার লেখ (Graphs of other Trigonometrical Expressions) ঃ

পূর্বোক্ত প্রণালীর অনুরূপ প্রণালীতে অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখও অঙ্কিত করা যায়। একটি উদাহরণ নিম্নে দেওয়া হইতেছে।

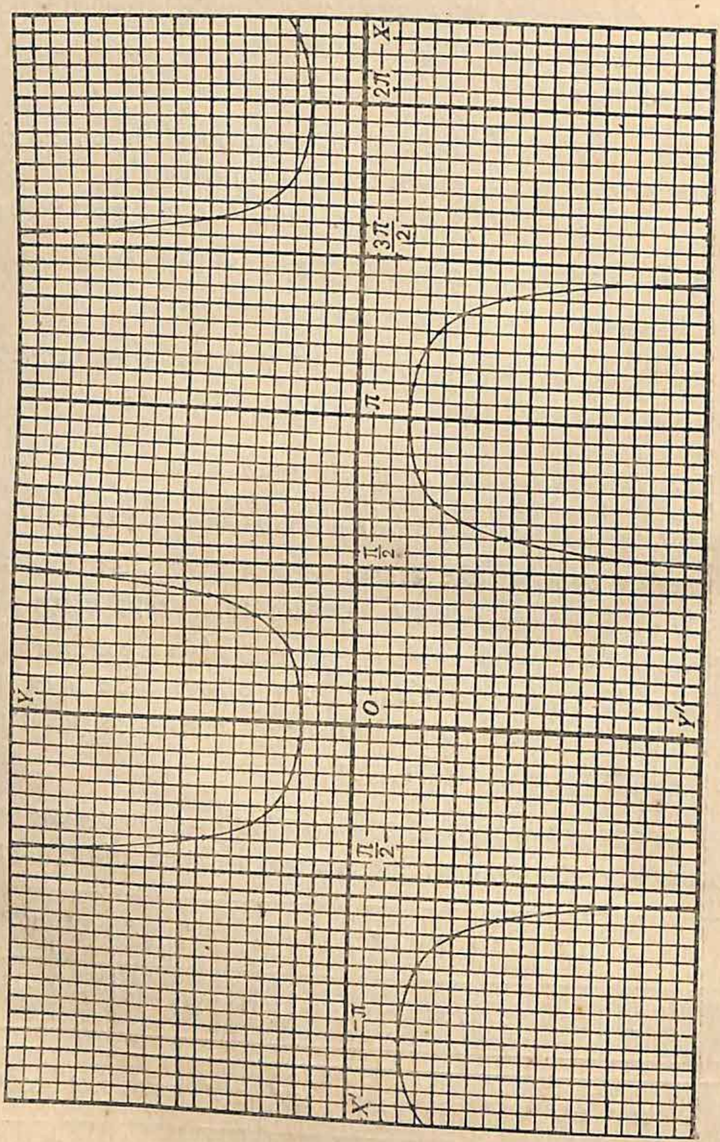
Ex. *Draw the graph of $y=\sin x+\cos x$ between the range $x=0$ to $x=2\pi$, and find from the graph the values of x for which (i) $y=0$, (ii) y is maximum, (iii) y is minimum.* [U. P. 1934]

স্বাভাবিক কোসাইন এবং সাইনের তালিকা হইতে x-এর বিভিন্ন মান অনুযায়ী $\sin x$ এবং $\cos x$-এর মান পৃথক্‌ভাবে লিখিয়া যোগ করিলে y-এর মান পাওয়া যায়। অথবা $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\,(\sin x\cos\frac{1}{4}\pi+\cos x\sin\frac{1}{4}\pi)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{1}{4}\pi)$ ধরিয়া সাইনের তালিকা হইতে x-এর মান অনুযায়ী $\sin(x+\frac{1}{4}\pi)$-এর মান নির্ণয় করা যায়, এবং পরে উহাকে $\sqrt{2}=1·414$ দ্বারা গুণ করিলে y-এর মান নির্ণীত হইবে।

x-এর মান 10° ব্যবধানে ধরিয়া $x=0$ হইতে $x=2\pi$ পর্যন্ত x এবং y-এর মানের তালিকা গঠন করা যায়। ইহাতে আমরা নিম্নলিখিত তালিকা পাই ঃ

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
y	1	1·15	1·27	1·37	1·41	1·41	1·37	1·27	1·15	1	·81

x	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	190°	200°
y	·59	·37	·13	−·13	−·37	−·59	−·81	−1	−1·15	−1·27



Secant-Graph

x	210°	220°	230°	240°	250°	260°	270°	280°
y	−1·37	−1·41	−1·41	−1·37	−1·27	−1·15	−1	−·81

x	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°	360°
y	−·59	−·37	−·13	·13	·37	·59	·81	1

এক্ষণে, OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু 10° এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের 10-টি বাহুকে একক সূচিত করিয়া তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলিকে ছক-কাগজে স্থাপন করিবার পর স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখার দ্বারা সংযুক্ত করিলেই লেখটি পাওয়া যাইবে (পর পৃষ্ঠায় দেখান হইয়াছে)।

লেখ হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, (i) $x=135°$ এবং $315°$ হইলে $y=0$. (ii) $x=45°$ হইলে y বৃহত্তম, (iii) $x=225°$ হইলে y ক্ষুদ্রতম।

17·10. সমীকরণের লৈখিক সমাধান (Graphical solution of equations) :

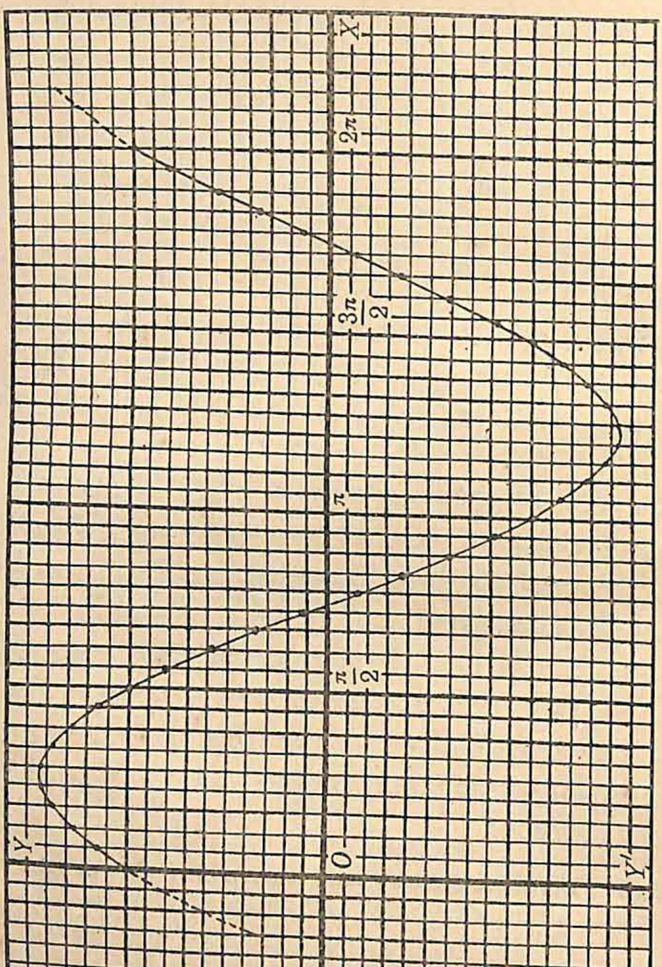
বীজীয় সমীকরণের ন্যায় ত্রিকোণমিতিক সমীকরণও লেখ-র সাহায্যে সমাধান করা যায় ; বস্তুতঃ বহু ব্যবহারিক ক্ষেত্রে [বিশেষতঃ যে সমস্ত ক্ষেত্রে সমাধান প্রমাণ কোণ (standard angle) নয়], দেখা যায় যে, একমাত্র লৈখিক পদ্ধতিই সমাধান করিবার পক্ষে সুবিধাজনক। এই পদ্ধতি নিম্নে দুইটি দৃষ্টান্ত দ্বারা দেখান হইতেছে :

Ex. 1. *Solve graphically the equation* $2\sin^2 x = \cos 2x$, *giving only those solutions of* x *which lie between* $-\frac{1}{2}\pi$ *and* $\frac{3}{2}\pi$.
[C. U. 1938, '46, '48]

এক্ষেত্রে, $y = 2\sin^2 x = (1 - \cos 2x)$,

এবং $y = \cos 2x$,

এই দুইটি সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে। প্রথমে আমরা স্বাভাবিক কোসাইনের তালিকার সাহায্যে $\frac{1}{2}\pi$ এবং $\frac{3}{2}\pi$ এর মধ্যবর্তী x-এর মান 10° বা 15° ব্যবধানে রাখিয়া x এবং y-এর অনুরূপ মানগুলির তালিকা উভয় লেখ-র ক্ষেত্রে পৃথক্‌ভাবে গঠন করিলাম।



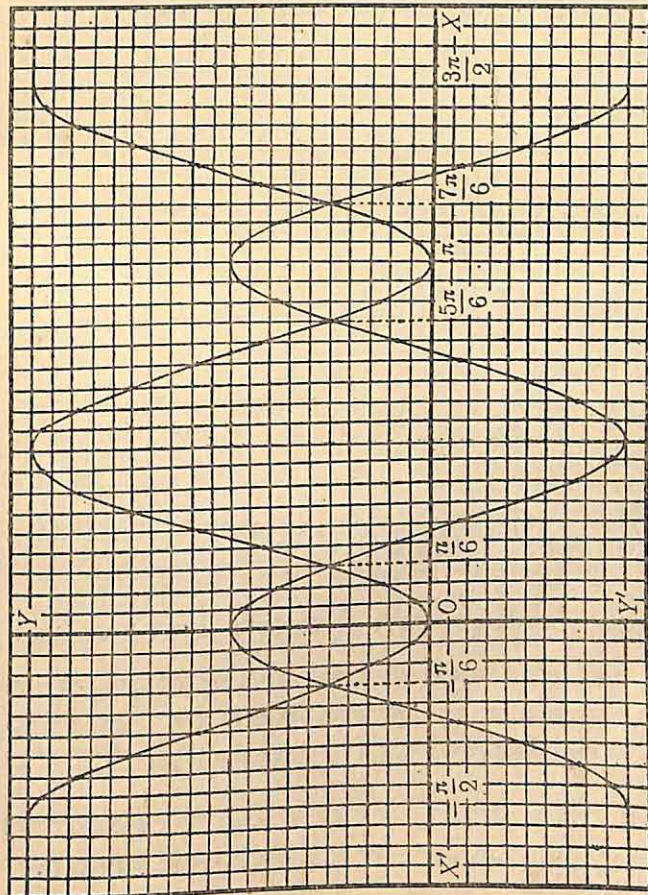
Graph of $\sin x + \cos x$

পূর্ববর্তী ক্ষেত্রগুলির ন্যায় একই স্কেলের সাহায্যে (অর্থাৎ OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু 10°-এর সমান এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের 10টি বাহু এককের সমান কল্পনা করিয়া) আমরা উভয় ক্ষেত্রের তালিকাভুক্ত মানের

অনুরূপ বিন্দুগুলি একই ছক-কাগজে স্থাপন করিয়া দুইটি লেখ অঙ্কিত করিলাম (নিম্নে দেখান হইয়াছে)।

দেখা যাইতেছে যে, লেখ দুইটি যে সকল বিন্দুতে ছেদ করিতেছে তাহাদের ভুজ $-\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$.

অতএব, $2\sin^2 x = \cos 2x$ সমীকরণটি সত্য হয়, যখন $x = -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$ এবং এইগুলিই $-\frac{1}{2}\pi$ এবং $\frac{3}{2}\pi$ এর মধ্যবর্তী x-এর সমাধান।



Graphical solution of $2\sin^2 x = \cos 2x$.

Ex. 2. *Solve graphically the equation* $\tan x = 2x$ *between* $x = 0$ *and* $x = \frac{1}{2}\pi$.
[C. U. 1939]

এক্ষেত্রে x-এর পরিমাপ রেডিয়ানে গণ্য করা হইল।

আমরা প্রথমে $y = 2x$ ... (1)

এবং $y = \tan x$ ... (2)

এই দুইটি সমীকরণের দুইটি লেখ অঙ্কন করি।

$x = 0$ এবং $x = \frac{1}{2}\pi$-এর মধ্যবর্তী x এবং y-এর অনুরূপ মানের তালিকা গঠন করা হইল।

(1)-এর ক্ষেত্রে :

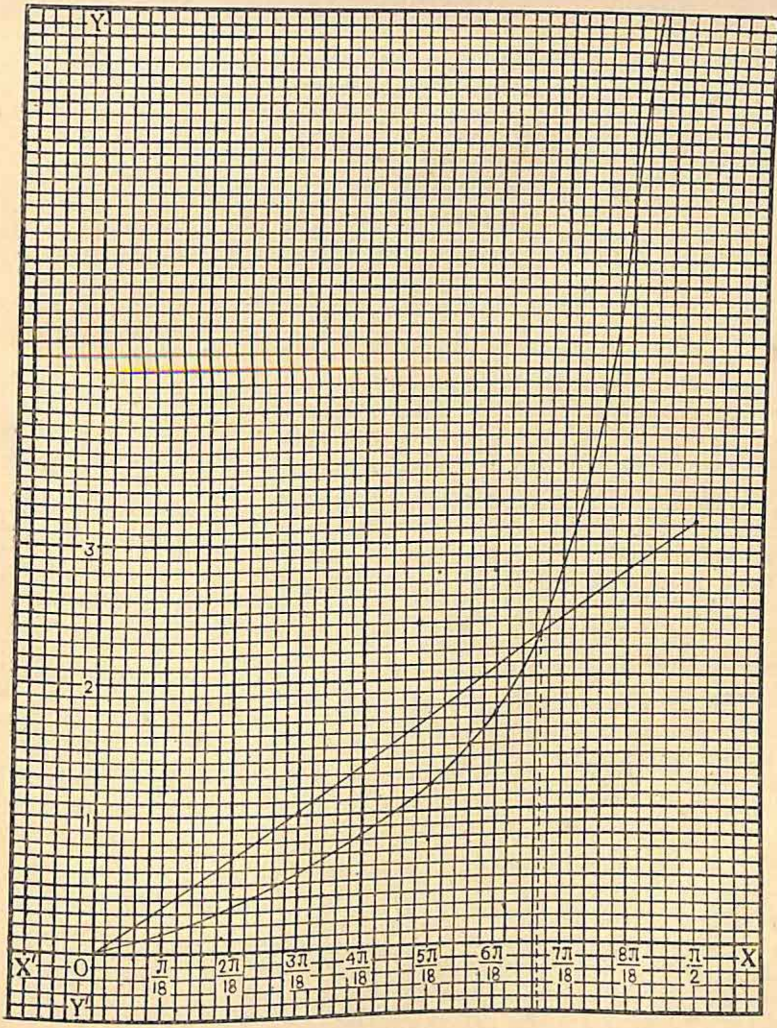
x (রেডিয়ানে)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y (অর্থাৎ $2x$) (আঙ্কিক মান)	0	1·05	2·10	3·15

(2)-এর ক্ষেত্রে :

x (রেডিয়ানে)	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{6\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{8\pi}{18}$	$\frac{\pi}{2}$
y (অর্থাৎ $\tan x$) (আঙ্কিক মান)	0	·18	·36	·57	·84	1·19	1·73	2·75	5·67	∞

OX-এর দিকে 5টি ক্ষুদ্র বাহুকে $\frac{\pi}{18}$ রেডিয়ান এবং OY-এর দিকে 10টি ক্ষুদ্র বাহু একক ধরিয়া আমরা উভয় সমীকরণের তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি একই ছক-কাগজে স্থাপন করিলাম। এই সকল বিন্দুগুলি যোগ করিলে আমরা $x = 0$ এবং $\frac{1}{2}\pi$-এর মধ্যে দুইটি লেখ পাইব। (সংলগ্ন চিত্র দ্রষ্টব্য)

আমরা দেখিতে পাই যে, লেখ দুইটি $x = 0$ বিন্দুতে এবং যাহার ভুজ ক্ষুদ্র বর্গের 33·5 বাহুর সমান সেইরূপ আর একটি বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। 33·5 বাহু আমাদের কল্পিত এককে প্রায় $\frac{33·5}{5} \times \frac{\pi}{18}$ বা 1·17 রেডিয়ান।



Graphical solution of $\tan x = 2x$.

অতএব, 0 এবং $\frac{1}{2}\pi$-এর মধ্যবর্তী x-এর যে সমস্ত মান $\tan x = 2x$ সমীকরণটির পক্ষে সম্ভব, তাহা যথাক্রমে $x = 0$ ও 1·17 ; এই দুইটিই উপরোক্ত সমীকরণের সমাধান।

Examples XVII

1. Draw the graphs of

(i) $\sin 3x$ between $x = 0°$ to $x = 180°$.

(ii) $\tan \frac{3}{2}x$ between $x = -\frac{1}{2}\pi$ to $x = \pi$.

(iii) $\sin \theta \cos \theta$ between $\theta = -\pi$ to $\theta = +\pi$

(iv) $\dfrac{1}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$ between $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ to $+\dfrac{\pi}{2}$.

(v) $\cos(\pi \sin x)$ between $x = 0$ to $x = \frac{1}{2}\pi$.

(vi) $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$ between $\theta = 0$ to $\theta = \pi$.

(vii) $\frac{1}{2}$ cosec $\frac{1}{2}x$ between $x = 0$ to $x = 2\pi$.

2. (i) Trace the changes in the sign of $\cos\theta - \sin\theta$ as θ changes from 0° to 360°. Verify your conclusions by a graph.

(ii) Trace the changes in sign and magnitude of $\dfrac{2\sin\theta - \sin 2\theta}{2\sin\theta + \sin 2\theta}$. [B. H. U. 1931]

3. Draw the graph of $y = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ between the limits $x = -\pi$ and $x = +\pi$.

4. Draw the graphs of $\sin\theta$ and $\cos\theta$ between $\theta = 0$ and $\theta = \pi$. Find the points where the graphs intersect.

[C. U. 1936, '46]

5. Construct the graphs of $\tan x$ and $\cos x$ between 0 and $\frac{1}{2}\pi$ for x, making a tabulation of the values of y dividing the interval into 9 equal parts.

If $\tan x = \cos x$, find approximately the value of x from the above two graphs. [C U. 1943]

6. Obtain graphically a solution of the equation $\tan x = 1$, between $x = 0$ and $x = \frac{1}{2}\pi$. [C. U. 1937]

[*Draw the graphs of* $y = \tan x$ *and* $y = 1$]

7. Draw the graph of $\cos x - \sin 2x$ for values of x lying between 0° and 90°, and hence obtain the least value of $\cos x - \sin 2x$ in this range.

8. Solve graphically the equations :

(i) $x - \tan x = 0$, between $x = 0$ and $x = \frac{1}{2}\pi$. [C. U. 1945]

(ii) $5 \sin \theta + 2 \cos \theta = 5$, between $\theta = 0°$ and $\theta = 270°$. [C. U. 1947]

[*Draw the graphs of* $y = 5 \sin \theta + 2 \cos \theta$ *and* $y = 5$ *and find the common points.*]

(iii) $\cot \theta - \tan \theta = 2$, between $\theta = 0$ and $\theta = \pi$. [C. U. 1949]

(iv) $\text{cosec } x = \cot x + \sqrt{3}$, between $x = 0$ and $x = \pi$.

(v) $\cos x = \sin 2x + \frac{1}{2}$, between $x = -\frac{1}{2}\pi$ and $x = +\frac{1}{2}\pi$.

(vi) $5 - \tan x = 2x$, between 0 and 2π.

(vii) $2 \sin x + x - 3 = 0$.

(viii) $x^2 = \cos x$.

(ix) $x = \cos^2 x$.

[*Draw the graphs of* $y = \cos 2x$ *and* $y = 2x - 1$.]

9. Represent by a graph the displacement given by

$$s = 2 \sin t + \sin 3t.$$

10. Show graphically that the equation $2 \sin x + \cos 2x = \frac{1}{2}x$ has only three real roots.

11. Sketch the graphs :

$y = x$, $y = \sin x$, $y = \tan x$, in $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. From the nature of graphs near the origin, can you suggest any relation among them at the origin ? [C. U. 1952]

ANSWERS

4. $\theta = \frac{1}{4}\pi$. 5. $x = 38° 10'$ nearly. 6. $\frac{1}{4}\pi$. 7. $-·37$ nearly.

8. (i) $x = 0$. (ii) $46° 25'$ (nearly) and $90°$. (iii) $22\frac{1}{2}°$ and $112\frac{1}{2}°$.

(iv) $\frac{2}{3}\pi$. (v) $14°$ nearly. (vi) 1·19, 2·72, 4·92.

(vii) 1·16, 3·28, 4·95. (viii) $\pm ·82$. (ix) ·64.

অষ্টাদশ অধ্যায়
পরিশিষ্ট (APPENDIX)
Sec. A—অপনয়ন (Elimination)

18·1. কোন কোন ক্ষেত্রে কয়েকটি নির্দিষ্ট সমীকরণ হইতে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের অপনয়ন খুবই প্রয়োজন হইয়া পড়ে। এই সম্পর্কে কোন বাঁধাধরা নিয়ম নাই; সমীকরণের রূপ হইতেই তাহা অনুমান করিতে হইবে এবং বীজগণিতের সাধারণ কৌশল ও ত্রিকোণমিতির সূত্রাবলীও এই সঙ্গে প্রয়োগ করিতে হইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে অপনয়নের কয়েকটি বিশিষ্ট কৌশলের প্রয়োগ দেখান হইয়াছে।

Ex. 1. *Eliminate θ between the equations*

$$a \cos\theta + b \sin\theta + c = 0$$
$$a' \cos\theta + b' \sin\theta + c' = 0.$$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$\frac{\cos\theta}{bc' - b'c} = \frac{\sin\theta}{ca' - c'a} = \frac{1}{ab' - a'b}.$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \quad \text{এবং} \quad \sin\theta = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

উভয়কে বর্গ করিয়া যোগ করিলে,

$$(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 = (ab' - a'b)^2.$$

Ex. 2. *Eliminate θ from the equations*

$$x \sin\theta + y \cos\theta = 2a \sin 2\theta$$
$$x \cos\theta - y \sin\theta = a \cos 2\theta.$$

উপরোক্ত সমীকরণ দুইটিকে x এবং y-এর সহ-সমীকরণ হিসাবে সমাধান করিলে, ইহা দেখা যায় যে,

$$\begin{aligned} x &= a(\cos 2\theta \cos\theta + 2 \sin 2\theta \sin\theta) \\ &= a[\cos(2\theta - \theta) + \sin 2\theta \sin\theta] \\ &= a[\cos\theta + 2 \sin^2\theta \cos\theta] \end{aligned}$$

এবং $y = a(2 \sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta)$

$$= a(\sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta) = a(\sin \theta + 2 \sin \theta \cos^2\theta).$$

$$\therefore\ x + y = a(\sin \theta + \cos \theta)(1 + 2 \sin \theta \cos \theta).$$

$$= a(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta)^2 = a(\cos \theta + \sin \theta)^3.$$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে,

$$x - y = a(\cos \theta - \sin \theta)(1 - 2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= a(\cos \theta - \sin \theta)^3.$$

$$\therefore\quad a^{\frac{1}{3}}(\cos \theta + \sin \theta) = (x + y)^{\frac{1}{3}} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$a^{\frac{1}{3}}(\cos \theta - \sin \theta) = (x - y)^{\frac{1}{3}} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

অতএব, উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া যোগ করিলে,

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

Ex. 3. *Eliminate x and y from the equations*

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c$$

$$b \sin^2 y + a \cos^2 y = d,$$

$$a \tan x = b \tan y.$$

প্রথম সমীকরণ হইতে,

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\therefore\quad (a - c) \sin^2 x = (c - b) \cos^2 x. \quad \therefore\quad \tan^2 x = \frac{c - b}{a - c}.$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি যে,

$$b \sin^2 y + a \cos^2 y = d\ (\sin^2 y + \cos^2 y). \quad \therefore\quad \tan^2 y = \frac{d - a}{b - d}$$

তৃতীয় সমীকরণ হইতে, $a^2 \tan^2 x = b^2 \tan^2 y$

$$\therefore\quad \frac{a^2(c - b)}{a - c} = \frac{b^2(d - a)}{b - d}$$

অতঃপর, সরল করিয়া আমরা নিম্নলিখিত অভেদটি পাই :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Examples XVIII

Eliminate θ from the following pair of equations :—

1. $\cot\theta(1+\sin\theta)=4a$
$\cot\theta(1-\sin\theta)=4b.$

2. $x=a\cos\theta+b\cos 2\theta$
$y=a\sin\theta+b\sin 2\theta.$

3. $x=\tan\theta+\tan 2\theta$
$y=\cot\theta+\cot 2\theta.$

4. $a\sin\theta+b\cos\theta=1$
$a\operatorname{cosec}\theta-b\sec\theta=1.$

5. $x=\sin\theta+\cos\theta\sin 2\theta$
$y=\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta.$

6. $x+a=a(2\cos\theta-\cos 2\theta)$
$y=a(2\sin\theta-\sin 2\theta).$

7. $x=3\sin\theta-\sin 3\theta$
$y=\cos 3\theta+3\cos\theta.$

8. $x=\cot\theta+\tan\theta$
$y=\sec\theta-\cos\theta.$

9. $x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}$
$\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}.$

10. $\dfrac{x}{a}=\cos\theta+\cos 2\theta$
$\dfrac{y}{b}=\sin\theta+\sin 2\theta.$

11. $\dfrac{ax}{\cos\theta}-\dfrac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$
$\dfrac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{by\cos\theta}{\sin^2\theta}=0.$

12. $\dfrac{x}{a}\cos\theta-\dfrac{y}{b}\sin\theta=\cos 2\theta$
$\dfrac{x}{a}\sin\theta+\dfrac{y}{b}\cos\theta=2\sin 2\theta.$

13. $x=\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta$
$y=\sec\theta-\cos\theta.$

14. $\sin\theta+\cos\theta=a$
$\sin^3\theta+\cos^3\theta=b.$

15. $\dfrac{x}{a}\cos\theta+\dfrac{y}{b}\sin\theta=1$
$x\sin\theta-y\cos\theta=(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}.$

Eliminate θ and ϕ from the following equations (*Ex.* 16-19) :—

16. $\sin\theta+\sin\phi=x$, $\cos\theta+\cos\phi=y$, $\theta-\phi=\alpha.$

17. $\tan\theta+\tan\phi=a$, $\cot\theta+\cot\phi=b$, $\theta+\phi=\alpha.$

18. $a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=a\cos^2\phi+b\sin^2\phi=1$, $a\tan\theta=b\tan\phi.$

19. $\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$, $\sin 2\theta+\sin 2\phi=2c$.

20. If $(a+b)\tan(\theta-\phi)=(a-b)\tan(\theta+\phi)$ and $a\cos 2\phi+b\cos 2\theta=c$, show that $a^2-b^2+c^2=2ac\cos 2\phi$.

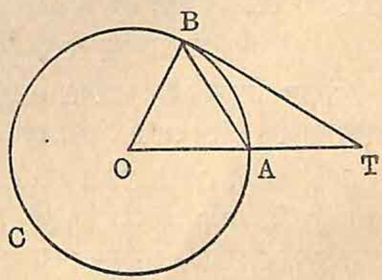
ANSWERS

1. $(a^2-b^2)^2=ab$.
2. $a^2\{(x+b)^2+y^2\}=(x^2+y^2-b^2)^2$.
3. $(x+3y)^2=xy^2(x+2y)$.
4. $a^2+b^2=1+b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{4}{3}}$.
5. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2$.
6. $(x^2+y^2+2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$.
7. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$.
8. $x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}=1$.
9. $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.
10. $\frac{2x}{a}=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-3\right)$.
11. $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.
12. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=2$.
13. $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1$.
14. $3a-2b=a^3$.
15. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b$.
16. $x^2+y^2-2\cos\alpha=2$.
17. $ab=(b-a)\tan\alpha$.
18. $a+b=2ab$.
19. $(ab-c)(a^2+b^2)=2ab$.

Sec. B

কোনও ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের বৃত্তীয়মান θ হইলে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\sin\theta<\theta<\tan\theta$.

মনে করি, ABC একটি O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত এবং r ইহার ব্যাসার্ধ। মনে করি, $\angle AOB=\theta$ রেডিয়ান। B বিন্দুতে BT স্পর্শক টানিলে ইহা OA-এর বর্ধিতাংশকে T বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore$ $BT=r\tan\theta$.



উপরন্তু, আমরা জানি যে, একটি r-ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কোন অংশ যদি কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে এই বৃত্তাংশটির ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}r^2\theta$.

চিত্র হইতে ইহা স্পষ্টই বুঝা যায় যে,

$\triangle OAB <$ OAB বৃত্তাংশ $< \triangle$ OBT.

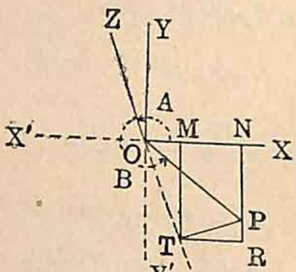
$\therefore \ \frac{1}{2}r^2 \sin\theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r.r \tan\theta.$

অর্থাৎ $\sin\theta < \theta < \tan\theta.$

Sec. C

1. A এবং B-এর যে-কোন মান হইলে sin (A+B) এবং cos (A+B)-এর সংশ্লিষ্ট সূত্রের প্রমাণ :—

6·1-অনুচ্ছেদে A, B এবং A+B সূক্ষ্মকোণ কল্পনা করিয়া sin (A+B) এবং cos (A+B)-এর সংশ্লিষ্ট সূত্রের জ্যামিতিক প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে। আমরা এখন উহা আরও ব্যাপকভাবে প্রমাণ করিব।



একটি রেখা OX হইতে আবর্তন আরম্ভ করিয়া $\angle XOZ = A$, এবং আরও আবর্তন করিয়া $\angle ZOP = B$ উৎপন্ন করে ; অতএব, উৎপন্ন সমগ্র কোণ (A+B)-এর সমান। আবর্তনকারী সরলরেখার শেষ অবস্থানের উপর যে-কোন বিন্দু P হইতে OX এবং OZ-এর উপর (প্রয়োজনবোধে বর্ধিত করিয়া) যথাক্রমে PN এবং PT লম্ব অঙ্কিত করা হইল এবং T বিন্দু হইতে TM এবং TR যথাক্রমে OX এবং PN-এর উপর (প্রয়োজনবোধে বর্ধিত করিয়া) লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

উপরের চিত্রে $\angle POT = B - 180°$ এবং যেহেতু PN এবং PT যথাক্রমে OX এবং OZ-এর উপর লম্ব, অতএব

$$\angle TPR = \angle TON = 180° - \angle XOZ = 180° - A.$$

NOP ত্রিভুজ হইতে sin (A+B) এবং cos (A+B)-এর আলোচনাকালে লক্ষ্য করিতে হইবে যে, PN ঋনাত্মক এবং ON ও OP ধনাত্মক।

যদি আমরা OTM, PTR এবং OPT ত্রিভুজগুলির মাত্র ধনাত্মক মানগুলি কল্পনা করি, তাহা হইলে উপযুক্ত চিহ্নসহ PN-কে $-(TM - PR)$ এবং ON-কে OM+TR-এর সমান লেখা যায়। এক্ষণে চিত্র হইতে,

$$\sin(A+B) = \frac{PN}{OP} = -\frac{TM - PR}{OP}$$

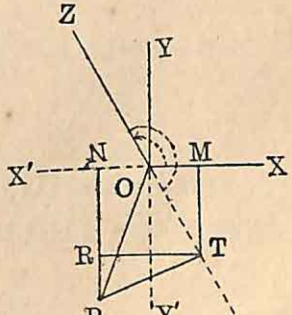
$$= -\frac{TM}{OT}\cdot\frac{OT}{OP}+\frac{PR}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}$$
$$= -\sin TOM \cos POT + \cos TPR \sin POT$$
$$= -\sin(180^\circ - A)\cos(B-180^\circ)$$
$$+ \cos(180^\circ - A)\sin(B - 180^\circ)$$
$$= -\sin A(-\cos B) + (-\cos A)(-\sin B)$$
$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

পুনরায়, $\cos(A+B) = \frac{ON}{OP} = \frac{OM+RT}{OP} = \frac{OM}{OT}\cdot\frac{OT}{OP}+\frac{RT}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}$

$$= \cos TOM \cos POT + \sin TPR \sin POT$$
$$= \cos(180^\circ - A)\cos(B-180^\circ)$$
$$+ \sin(180^\circ - A)\sin(B-180^\circ)$$
$$= (-\cos A)(-\cos B) + \sin A(-\sin B)$$
$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

2. sin (A − B) এবং cos (A − B)-এর আরও ব্যাপক প্রমাণ (6·2 অনুচ্ছেদের সামান্যীকরণ) :—

এক্ষেত্রে XOZ কোণের ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতাভিমুখী পরিমাপ A, এবং ZOP কোণের ঘড়ির কাঁটার গতির অভিমুখী পরিমাপ B ; স্থতরাং ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতাভিমুখী পরিমাপ লইলে XOP-এর মান A − B ; P হইতে PN এবং PT যথাক্রমে OX এবং OZ (চিত্রে বর্ধিতাংশের) এর উপর লম্ব ; T হইতে TM এবং TR যথাক্রমে OX এবং PN-এর উপর লম্ব টানা হইয়াছে। বর্তমান চিত্রে TOM এবং POT কোণদ্বয়ের পরিমাপ যথাক্রমে $180^\circ - A$ এবং $B - 180^\circ$ এবং PNOT বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া (∠N এবং ∠T সমকোণ) $\angle RPT = \angle TOM = 180^\circ - A$ (পরিমাপে)।



এক্ষণে, NOP ত্রিভুজের সাহায্যে sin (A − B) এবং cos (A − B)-এর পরিমাপ আলোচনা করিতে হইলে PN এবং ON-এর চিহ্ন ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

অতএব, $\sin(A-B)=\frac{PN}{OP}=-\frac{MT+PR}{OP}$ (MT, PR ইত্যাদির কেবলমাত্র মান গণ্য করিয়া)

$$=-\frac{MT}{OT}\cdot\frac{OT}{OP}-\frac{PR}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}$$
$$=-\sin TOM\cos POT-\cos RPT\sin POT$$
$$=-\sin(180^\circ-A)\cos(B-180^\circ)-\cos(180^\circ-A)\sin(B-180^\circ)$$
$$=-\sin A(-\cos B)-(-\cos A)(-\sin B)$$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

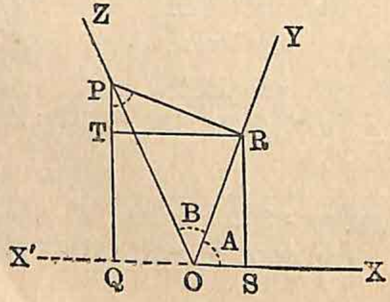
অনুরূপভাবে, $\cos(A-B)=\frac{ON}{OP}$ [ON-এর উপযুক্ত চিহ্ন ধরিলে]

$$=-\frac{RT-OM}{OP}$$ [RT, OM ইত্যাদির কেবলমাত্র আঙ্কিক পরিমাপ ধরিয়া]

$$=-\frac{RT}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}+\frac{OM}{OT}\cdot\frac{OT}{OP}$$
$$=-\sin RPT\sin POT+\cos TOM\cos POT$$
$$=-\sin(180^\circ-A)\sin(B-180^\circ)+\cos(180^\circ-A)\cos(B-180^\circ)$$
$$=-\sin A(-\sin B)+(-\cos A)(-\cos B)$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

3. $\sin(A\pm B)$, $\cos(A\pm B)$-র কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র।

প্রথম ক্ষেত্র : A এবং B উভয়েই সূক্ষ্মকোণ, কিন্তু $A+B>90^\circ$.



অঙ্কন 6·1 অনুচ্ছেদের অনুরূপ ; এক্ষেত্রে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু Q, XO-র বর্ধিতাংশের উপর পড়িবে।

$$\angle TPR = 90^\circ - \angle TRP = \angle TRO = \angle ROS = A.$$

$$\sin(A+B) = \sin XOP = \frac{PQ}{OP} = \frac{QT+PT}{OP} = \frac{RS+PT}{OP}$$

$$= \frac{RS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} + \frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos TPR \sin B$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

$$\cos(A+B) = \cos XOP = -\frac{OQ}{OP}$$ [OQ-র কেবলমাত্র আঙ্কিক মান ধরা হইয়াছে]

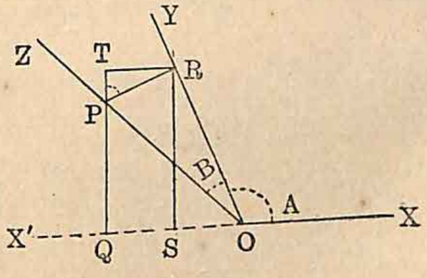
$$= -\frac{SQ-SO}{OP} = \frac{OS}{OP} - \frac{SQ}{OP} = \frac{OS}{OP} - \frac{TR}{OP}$$

$$= \frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} - \frac{TR}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin TPR \sin B$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : A স্থূলকোণ, B সূক্ষ্মকোণ, কিন্তু A + B < 180°.



অঙ্কন 6·1 অনুচ্ছেদের অনুরূপ।

এক্ষেত্রে, $\angle TPR = 180^\circ - \angle RPQ = \angle ROQ = 180^\circ - A.$

$\therefore \quad \sin TPR = \sin A, \ \cos TPR = -\cos A.$

$$\sin(A+B) = \sin XOP = \frac{PQ}{OP} = \frac{QT-TP}{OP} = \frac{RS-PT}{OP} = \frac{RS}{OP} - \frac{PT}{OP}$$

$$= \frac{RS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} - \frac{PT}{PR} \cdot \frac{PR}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos TPR . \sin B.$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

$\cos(A+B) = \cos XOP = -\frac{OQ}{OP}$ [OQ-র কেবলমাত্র আঙ্কিক পরিমাপ লইয়া]

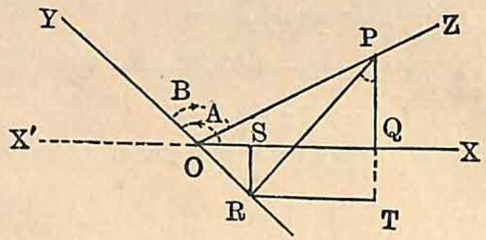
$$= -\frac{OS+SQ}{OP} = -\frac{OS}{OP} - \frac{SQ}{OP} = -\frac{OS}{OP} - \frac{TR}{OP}$$

$$= -\frac{OS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} - \frac{TR}{PR} \cdot \frac{PR}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin TPR \sin B$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

তৃতীয় ক্ষেত্র : A এবং B উভয়েই স্থূলকোণ, কিন্তু A – B সূক্ষ্ম-কোণ।



অঙ্কন 6·2 অনুচ্ছেদের অনুরূপ।

এক্ষেত্রে $\angle TPR = \angle ROS = 180° - A.$

$$\sin(A-B) = \sin POQ = \frac{PQ}{OP} = \frac{PT-RS}{OP} = \frac{PT}{OP} - \frac{RS}{OP}$$

$$= \frac{PT}{PR} \cdot \frac{PR}{OP} - \frac{RS}{OR} \cdot \frac{OR}{OP}$$

$$= \cos TPR \sin POR - \sin ROS \cos POR$$

$$= \cos(180° - A) \sin(180° - B) - \sin(180° - A) \cos(180° - B)$$

$$= -\cos A \sin B - \sin A(-\cos B)$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

$$\cos(A-B)=\cos POQ=\frac{OQ}{OP}=\frac{OS+SQ}{OP}=\frac{OS}{OP}+\frac{RT}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{RT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=\cos ROS\cos POR+\sin TPR\sin POR$$

$$=\cos(180^\circ-A)\cos(180^\circ-B)$$
$$+\sin(180^\circ-A)\sin(180^\circ-B)$$

$$=(-\cos A)(-\cos B)+\sin A\sin B$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

দ্রষ্টব্য। অন্যান্য বিশিষ্ট ক্ষেত্রেও উপরোক্ত চারিটি সূত্র প্রমাণ করা যায়। উহাদের অঙ্কন ও প্রমাণের পদ্ধতি অনুচ্ছেদ 6·1 ও 6·2-র অনুরূপ।

Sec. D

অনুচ্ছেদ 13·10-র অনুসিদ্ধান্ত

অনুচ্ছেদ 13·2, 13·3, 13·4 এর সূত্রগুলিকে যথাক্রমে (I), (II) ও (III) দ্বারা সূচিত করা হইল। অনুচ্ছেদ 13·10-তে দেখানো হইয়াছে যে (III) নং সূত্র হইতে (II) নং সূত্র পাওয়া যায়। এক্ষণে আমরা দেখাইব যে, কোন একটি হইতে অপর দুইটি সূত্র প্রমাণ করা যায়।

(III) নং সূত্রের দ্বারা (I) নং সূত্রের প্রমাণ ঃ

অনু ঃ 13·4-র দ্বিতীয় সূত্র হইতে b-র মান যদি প্রথম সূত্রে বসানো যায়, তাহা হইলে

$$a=(c\cos A+a\cos C)\cos C+c\cos B$$

$$\therefore\quad a(1-\cos^2 C)=c(\cos A\cos C+\cos B)$$

$$=c\{\cos A\cos C-\cos(A+C)\}\qquad[\because A+B+C=\pi]$$

$$=c\sin A\sin C.$$

$$\therefore\quad a\sin^2 C=c\sin A\sin C.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

অনুরূপভাবে, c-র মান প্রথম সূত্রে বসাইলে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

অতএব, $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

(I) নং সূত্রের দ্বারা (II) ও (III) নং সূত্রের প্রমাণ :

(i) মনে করি, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k.$

অতএব, $a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$

$$\therefore\ \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{k^2(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)}{k^2.2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2 B+\sin(C+A)\sin(C-A)}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin B\{\sin B+\sin(C-A)\}}{2\sin B\sin C}$$

$$[\because\ \sin(C+A)=\sin(\pi-B)=\sin B]$$

$$=\frac{\sin B\{\sin(C+A)+\sin(C-A)\}}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{2\sin B\sin C\cos A}{2\sin B\sin C}=\cos A.$$

(ii) $b\cos C+c\cos B=k(\sin B\cos C+\sin C\cos B)$
$=k\sin(B+C)=k\sin A\quad[\because\ A+B+C=\pi]$
$=a.$

(II) নং সূত্র হইতে (I) নং ও (III) নং সূত্রের প্রমাণ :

(i) $\sin^2 A=1-\cos^2 A$

$$=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{k}{4b^2c^2}$$ [ধরা হইল] $\therefore\ \dfrac{\sin^2 A}{a^2}=\dfrac{k}{4a^2b^2c^2}.$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{k}{4a^2b^2c^2}, \text{ এবং, } \frac{\sin^2 C}{c^2}=\frac{k}{4a^2b^2c^2}.$$

$$\therefore \frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}.$$

সুতরাং $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}.$

(ii) অনুচ্ছেদ-এর দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্র যোগ করিলে

$$b^2+c^2=b^2+c^2+2a^2-2ca\cos B-2ab\cos C$$

$$\therefore \quad 2a^2=2ca\cos B+2ab\cos C$$

বা $a=c\cos B+b\cos C.$

BOARD OF SECONDARY EDUCATION, WEST BENGAL

Higher Secondary Examination Papers

1960

1. (*a*) Prove that the radian is a constant angle. Find its value in degrees, minutes etc. [$\pi = \frac{22}{7}$]

(*b*) The angles of a triangle are in Arithmetical Progression and the number of degrees in the least is to the number of radians in the greatest as 60 to π. Find the angles in degrees.

2. (*a*) If A, B, $A+B$ are all acute angles, prove (geometrically) that

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

(*b*) Find the value of

$$\sin^2 60° + \cos^2 150° + \tan^2 120° + \cos 180° - \tan 135°.$$

3. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$.

(*b*) If $A+B=90°$, prove that

$$\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A} = \tan A - \tan B.$$

4. (*a*) In a triangle ABC, prove that $a = b\cos C + c\cos B$.

(*b*) In a triangle, the angles are to one another as 1 : 2 : 3 ; prove that the corresponding sides are as $1 : \sqrt{3} : 2$.

5. Two vertical pillars, the height of one of which is double that of the other, are at a distance of 150 ft. from each other. At a point between the pillars and on the line joining their feet the angular elevations of the tops of the taller and the shorter pillar are found to be 60° and 30° respectively. Find the heights of the pillars and the position of the point.

6. Draw the graph of $\sin x$ between the values $x = -\pi$ and $x = \pi$ and find, from the graph, the value of sin 120°.

1960 (Compartmental)

1. (*a*) The difference between the two acute angles of a right-angled triangle is $\frac{3}{5}\pi$ radians ; express these angles in degrees.

(*b*) If s is the length of the arc of a circle whose radius is r and θ is the radian measure of the angle at the centre, standing on the arc, prove that $\theta = s/r$.

2. (*a*) If A and B are both acute angles and A is greater than B, prove (geometrically) that

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

(*b*) If $\sin A=\frac{3}{5}$ and $\cos B=\frac{12}{13}$, where A and B are acute angles, find the value of

$$\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

3. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation

$$\sin^2\theta-2\cos\theta+\tfrac{1}{4}=0.$$

(*b*) If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

4. In a triangle ABC, prove that

(i) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, (ii) $a\cos\dfrac{B-C}{2}=(b+c)\sin\dfrac{A}{2}$.

5. The upper part of a straight tree broken over by the wind, but not completely separated, makes an angle of 30° with the ground, and the distance from the root to the point where the top of the tree touches the ground is 50 feet. What was the height of the tree?

6. Draw the graph of $\cos x$ between the values of $x=-\pi$ and $x=\pi$ and read off from the graph, the value of $\cos 150^\circ$.

1961

1. (*a*) The radius of a circle is 10 cm.; find the angle, in degrees and minutes, subtended at its centre by an arc 6 cm. in length. [$\pi=\frac{22}{7}$]

(*b*) The angles of a triangle are in Arithmetical Progression. If the number of degrees in the greatest angle is the same as the number of grades in the least, find the angles in degrees.

2. (*a*) If A, B and $A-B$ are positive acute angles, prove geometrically that

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

(*b*) Find the value of

$$\sin 330^\circ+\tan 45^\circ-4\sin^2 120^\circ+2\cos^2 135^\circ+\sec^2 180^\circ.$$

3. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation

$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1.$$

(*b*) If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

4. In a triangle ABC, prove that

(*a*) $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$.

(*b*) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.

5. On a straight coast there are three objects A, B and C such that $AB=BC=4$ miles. A steamer approaches B in a line perpendicular to the coast and at a certain point AC is found to subtend an angle of 60° ; after sailing in the same direction for ten minutes, AC is found to subtend an angle of 120° ; find the rate at which the steamer is going.

6. Draw the graph of $\sin x$ between the values of $x=0°$ and $x=360°$ and read off from the graph, the value of sin 240°

1961 (Compartmental)

1. (a) Define a radian. Taking $\pi=3{\cdot}1416$, show that a radian contains 206265 seconds approximately.

(b) One angle of a triangle is $\frac{2}{3}x$ grades and another is $\frac{3}{2}x$ degrees, whilst the third is $\frac{\pi x}{75}$ radians ; express them all in degrees.

2. (a) If A, B and $A-B$ are all positive acute angles, prove geometrically that

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

(b) Find the value of

$$\frac{2\tan^2 30°}{1-\tan^2 30°}+(\sec^2 45°-\cot^2 45°)-(\cos^2 60°+\sin^2 120°).$$

3. (a) Prove that

$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$$

(b) If $A+B+C=180°$, prove that

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

4. In a triangle ABC, prove

(a) $c=a\cos B+b\cos A$.

(b) $(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B+C}{2}$.

5. Two vertical poles are 120 feet apart and the height of one is double that of the other. From the middle point of the line joining their feet, an observer finds the angular elevations of their tops to be complementary. Find their heights.

6. Draw the graph of $\cos x$ between the values $x=0°$ and $x=360°$ and read off from the graph the value of cos 300°.

1962

1. (a) The circular measures of two angles of a triangle are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$. Find the number of degrees and minutes in the third angle.

[$\frac{22}{7}$ radians = 2 right angles]

(b) The diameter of a graduated circle is 6 ft. and the graduations on its rim are 15′ apart; find the distance (in inches correct to two places of decimals) from one graduation to another next to it. [$\pi = \frac{22}{7}$]

2. (a) If A, B, $A+B$ are all acute angles, prove geometrically, that $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

(b) Show that

$$\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ) \sin(-330^\circ) = 1.$$

3. (a) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation

$$\cos^2\theta - \sin\theta = \tfrac{1}{4}.$$

(b) If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

4. In a triangle ABC, prove that

(a) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

(b) $a \sin\left(\dfrac{A}{2}+c\right) = (b+c)\sin\dfrac{A}{2}$.

5. The angle of elevation of the top of a tower is observed to be 60° from a point in the horizontal plane through the foot of the tower; at a point 40 ft. vertically above the first point of observation, the elevation is found to be 45°. Find the height of the tower and its horizontal distance from the points of observation.

6. Draw the graph of $\cos x$, between the values of $x=-\pi$ and $x=\pi$ and read off from the graph the value of $\cos 120^\circ$.

1963

1. (a) If A, B and $A-B$ and $A-B$ are all acute angles, prove that

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

(b) If $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$, prove that $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$.

2. (a) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation,

$$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}.$$

(b) If $A+B+C=180^\circ$, prove that

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

3. (*a*) Prove that in a triangle ABC, with the usual notations

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

(*b*) The sides of a traingle are 20″, 21″ and 29″. Find its greatest angle.

4. A man on a cliff observes a boat at an angle of depression of 30°, which is making for the shore immediately beneath him. Three minutes later the angle of depression of the boat is found to be 60°; assuming that the boat moves uniformly, how soon will it reach the shore?

5. Draw the graph of $\sin 2x$ between the values of $x=-\pi$ and $x=\pi$ and read off from the graph the value of sin 150°.

1964

1. (*a*) If A, B, $A+B$ are all acute angles, prove geometrically

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

(*b*) If $\tan\theta+\sec\theta=x$, prove that

$$\sin\theta=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

2 (*a*) Prove that, in a triangle ABC, with the usual notations

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

(*b*) The sides of a triangle are 9, 10 and 11, find the angle opposite to the side 10, given

$$L\tan 29^\circ\,30'=9{\cdot}7526420$$
$$L\tan 29^\circ\,29'=9{\cdot}7523472$$
$$\log 2={\cdot}30103.$$

3. Two chimneys are of equal height. A person standing between them in the line joining their bases, which is horizontal, observes the elevation of the nearer one to be 60°.

After walking 80 feet in a horizontal direction perpendicular to the line joining their bases, he observes the elevations of the two to be 45° and 30° respectively. Find the height of the chimneys.

4. Draw the graph of $y=\cos x-\sin x$ between the values of $x=-\pi$ and $x=\pi$ and find from the graph the value of x for which $\tan x=1$.

TABLES OF LOGARITHMS, NATURAL SINES, NATURAL TANGENTS, LOGARITHMIC SINES, LOGARITHMIC TANGENTS ETC.

TABLE I

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	42	83	125	166	208	248	290	331	373
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	38	76	114	152	190	227	265	302	340
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	35	70	105	140	175	209	243	278	313
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	32	65	97	129	162	193	225	258	290
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	30	60	90	120	150	180	210	240	270
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	26	53	79	105	132	158	184	210	237
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	25	50	74	99	124	149	174	199	223
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	23	47	70	94	117	141	164	188	211
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	22	45	67	89	111	134	156	178	201
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	42	64	85	106	127	148	170	191
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	40	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	19	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	36	53	71	89	107	124	142	160
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	106	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	42	55	69	83	97	110	125
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	86	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	52	63	73	84	94
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	75	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	37	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	62	71	80
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	61	70	79
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	51	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	62	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	45	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	57	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	35	42	49	56	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	42	49	56	63
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	21	27	34	41	48	55	62
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	39	45	52	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	13	19	25	31	37	44	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	18	25	31	37	43	49	55
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	30	36	42	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	18	23	29	35	41	47	52

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	40	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	5	11	16	22	27	33	38	44	49
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	43	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	26	32	37	42	47
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	21	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	25	30	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	29	33	38	43
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	19	23	28	33	37	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	41
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	30	35	39

TABLE II
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187

NATURAL COSINES

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

Mean Differences: columns 1′–9′.

65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97875	·97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99255	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°									
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°									
90°	1·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COSINES.

TABLE III

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515

NATURAL COTANGENTS

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	166	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°	The differences change very rapidly here so that they cannot be tabulated.								
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·0780	10·3854	10·7119	11·0594	11·4301	5°									
85°	11·4301	11·8262	12·2505	12·7062	13·1969	13·7267	14·3007	4°	The cotangent of a small angle of x' or the tangent of $90° - x'$ is very nearly equal to 3437·7 divided by x.								
86°	14·3007	14·9244	15·6048	16·3499	17·1693	18·0750	19·0811	3°									
87°	19·0811	20·2056	21·4704	22·9038	24·5418	26·4316	28·6363	2°									
88°	28·6363	31·2416	34·3678	38·1885	42·9641	49·1039	57·2900	1°									
89°	57·2900	68·7501	85·9398	114·589	171·885	343·774	$+\infty$	0°									
90°	$+\infty$																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS

TABLE IV

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	−∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°									
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. For small angles of x minutes $\log \sin x'$ or $\log \cos (90° - x') = \log x + \bar{4}{\cdot}46373$.

20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	·84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86294	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	74	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91241	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

TABLE V

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	−∞	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°									
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

(Mean Differences, 0°–6°:) Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible.

For small angles of x minutes log tan x' or log cot $(90° - x')$ $= \log x + \bar{4}\cdot46373$.

20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293

65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76113	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°	Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible.								
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°									
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

SOME USEFUL CONSTANTS

One radian = $57° 17' 45''$ nearly = $206265''$;

$\log 206265 = 5{\cdot}3144255.$

$\pi = 3{\cdot}14159265\ldots$ $\quad \frac{1}{\pi} = 0{\cdot}31830989\ldots$

$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142135\ldots$ $\quad \sqrt{3} = 1{\cdot}7320508\ldots$

$\sqrt{5} = 2{\cdot}2360679\ldots$ $\quad \sqrt{6} = 2{\cdot}4494897\ldots$

$\sqrt{7} = 2{\cdot}6457513\ldots$ $\quad \sqrt{8} = 2{\cdot}8284271\ldots$

$\sqrt{10} = 3{\cdot}1622776\ldots$

SOME USEFUL LOGARITHMS

$\log 2 = {\cdot}30103$ $\quad \log 3 = {\cdot}47712$

$\log 5 = {\cdot}69897$ $\quad \log 7 = {\cdot}84510$

মূল্য তিন টাকা পঁচাত্তর পয়সা

বোর্ড বাঁধাই পাঁচ টাকা